Les rendez-vous de l’Esiee-Amiens

« Le temps est une illusion, disait A. Einstein »

Saïd Koutani

24 février 2005

Est-ce que le temps peut constituer un objet de la connaissance scientifique (de la Physique en particulier) ?

Le temps de la Physique est un paramètre de représentation des événements dans leurs successions. Il implique une connaissance objective extérieure aux événements.

« La division conventionnelle du monde en sujet et objet, en monde intérieur et monde extérieur […] ne peut plus s'appliquer et soulève des difficultés »

Werner Heisenberg (VF 1962)

Flèches du temps

Constante cosmologique → Flèche cosmologique FC ← Univers en expansion

$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ → Flèche électromagnétique FE → $\cancel{S\left(t+\frac{r}{c}\right)} + S\left(t-\frac{r}{c}\right)$

2^d **principe** → Flèche thermodynamique FT

$$\mathrm{FT} \overset{\text{A. Einstein}}{\Longrightarrow} \mathrm{FE} \quad \text{ou} \quad \mathrm{FE} \overset{\text{W. Ritz}}{\Longrightarrow} \mathrm{FT}$$

Flèche psychologique : FP

H. Bergson

La science fabriquerait ‘‘son réel’’: → **le temps n'est qu'un paramètre**

A. Einstein

Incompréhension réciproque

Y. Prigogine

Relecture

La pensée mécanique : gloire de la trajectoire

→ **Isaac Newton.**

Les principes de la mécanique newtonienne : 1665

Principes mathématiques de la philosophie naturelle : 1687

→ **Christian Huygens.**

Application de la méthode de la Mécanique newtonienne à l'optique

Traité de la lumière : 1690

→ **Gottfried W. Leibniz.**

Le monde : Harmonie préétablie, mathématisable : principe de raison suffisante

Si l'essence du corps consiste dans l'étendu : 1691

Propagation de la pensée mécanique. Contribution importante : **John Locke** (1632-1704)

→ **Naissance des sociétés savantes**

Académie française : 1635

Royal Society (Londres) : 1665

→ **Encyclopédie des sciences, des arts et des métiers :** 1751

D'Alembert :

-il n'y a de grandeur mesurable que l'étendu.

-la science des grandeurs est le fondement de toutes les découvertes qu'on peut faire sur la quantité.

REDUCTIONISME

→ Tout se réduit aux trajectoires : déterminisme

→ La mesure exclut le rôle du sujet : pas de qualité

Et la chaleur ? → **Influence de la pensée mécanique**

Joseph Fourier (1768-1830). Loi d'écoulement de la chaleur (1811)

« *La théorie analytique de la chaleur* » (1822)

Chaleur : fluide en écoulement = le calorique !!!!!!

La mécanique newtonienne est réversible

Changer t en $-t$ $\longrightarrow$ l'équation $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ reste invariante.

Dans cette conception, notre monde ne différencie pas le passé du futur.

Le sentiment du contraire serait soit une illusion ou une insuffisance mathématique.

ATTENTION

Hiérarchie des équations !

Exemple : Navier-Stokes

$\uparrow$ $\uparrow$

1825 1845

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}\left[\rho g z + p\right] + \mu\Delta\vec{V}$$

Irréversibilité à cause de la dissipation : mais la viscosité μ est macroscopique.

La mécanique analytique : les labyrinthes de l'espace des phases

Joseph Louis de Lagrange (1736-1813)

William Hamilton (1805-1865)

Joseph Liouville (1809-1882)

q : position (3 variables)

p : impulsion (3 variables)

Pour N particules : on construit un espace à 6N dimensions

L'espace des phases (q, p) est une coupe de l'espace d'évolution (q, p, t).

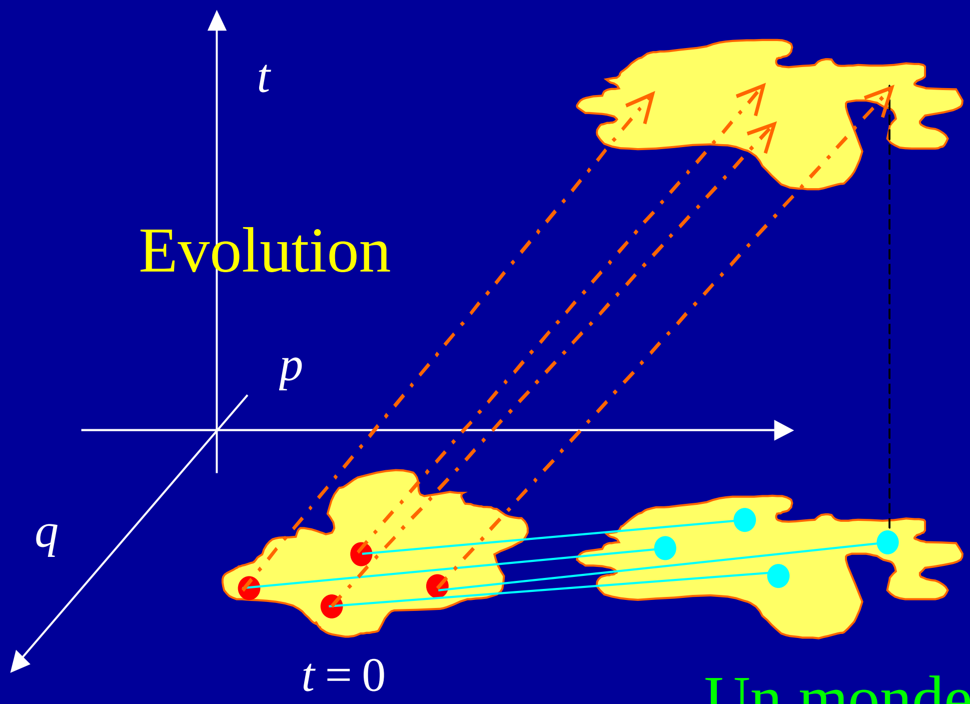
Chaque point (qi, pi) représente un état possible de la particule i.

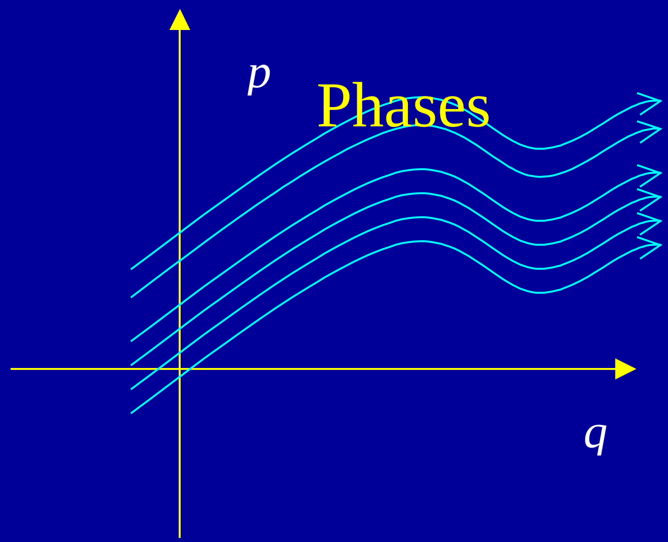
Flot hamiltonien

L'évolution des points dans l'espace des phases constitue des trajectoires ou un ***flot hamiltonien*** équivalent à l'écoulement d'un fluide. $\longrightarrow$ importante similitude

Tout est décrit par le comportement de l'hamiltonien ***H(q,p)***

Equations de Hamilton : $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ **et** $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$





Un monde tranquille où rien ne se produit !

Ce flot est incompressible

En effet, la trace du tenseur *taux de déformations* de la mécanique des fluides, qui n'est rien d'autre que la divergence du champ de vitesses, se trouve nulle :

$$\vec{v}_p = \left(\dot{q}_i\ ,\dot{p}_i\right) = \left(\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right),\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{v}_p = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0$$

Les domaines de l'espace des phases peuvent se déformer mais **leurs volumes restent invariants au cours de l'évolution** du système entre états.

La densité de points de l'espace des phases est invariante au cours du temps

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{v}_p\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}_p.\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}.\vec{v}_p = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}_p.\vec{\nabla}\rho = \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$\rightarrow$ Equation de Liouville : $\boldsymbol{\frac{d\rho}{dt}} = 0$

Signification de $\boldsymbol{\rho}$: distribution de probabilité

Opérateur de Liouville

On a : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} - [H, \rho] = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} - [H, \rho] = 0$ est l'équation de Liouville où $[H, \rho]$ est le crochet de Poisson de H et de ρ.

Equation que l'on peut réécrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -iL\rho,$$

en introduisant l'opérateur de Liouville classique *L*

$$L\rho \equiv i[H, \rho].$$

Une intégration formelle de l'équation donne :

$$\rho(q, p, t) = \rho(q, p, t_0) e^{-iLt}$$

L'équation de Liouville est invariante par renversement du temps :

$t \rightarrow -t$

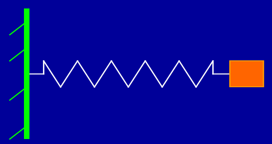
« Il semble probable qu'il faudra chercher ailleurs l'explication des phénomènes irréversibles et renoncer pour cela aux hypothèses familières de la mécanique rationnelle d'où l'on a tiré les équations de Lagrange et de Hamilton. » **H. Poincaré.**

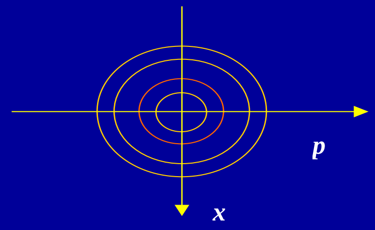
Le verdict de Poincaré

La plupart des systèmes sont non intégrables : problème à N corps (N>2)

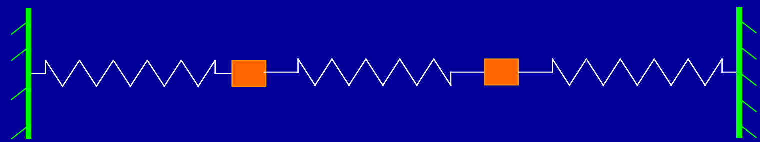
→ problème des petits dénominateurs : divergence à la résonance

$$\frac{1}{n_1 f_1 + n_2 f_2}$$

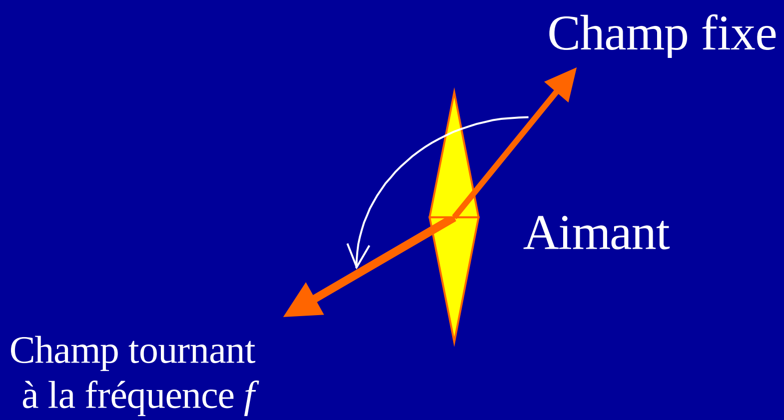




Oscillation sans frottement



Système intégrable : les solutions s'enroulent sur des tores T2 (Tores de KAM) dans l'espace des phases à 4 dimensions.

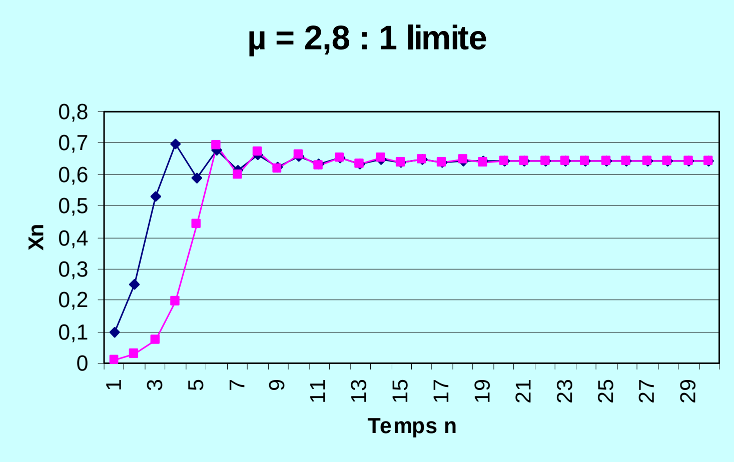


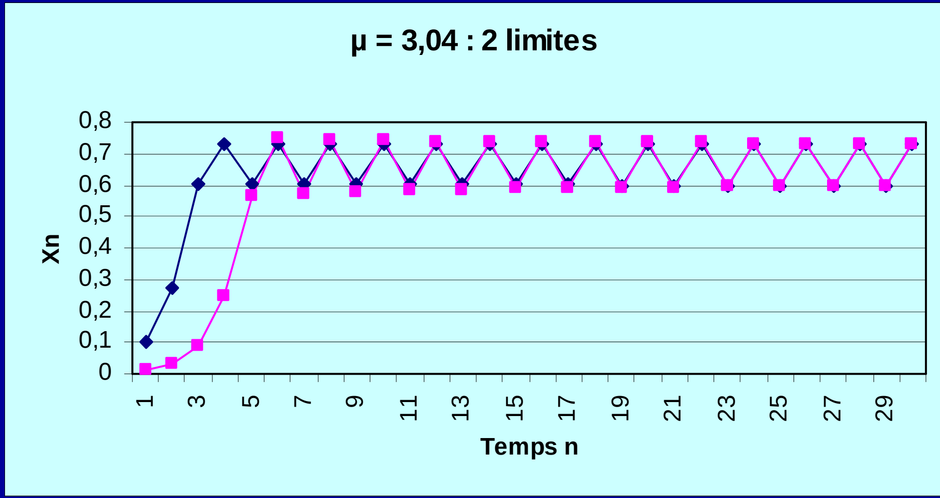
Système non intégrable : mouvement erratique, phénomène stochastique.

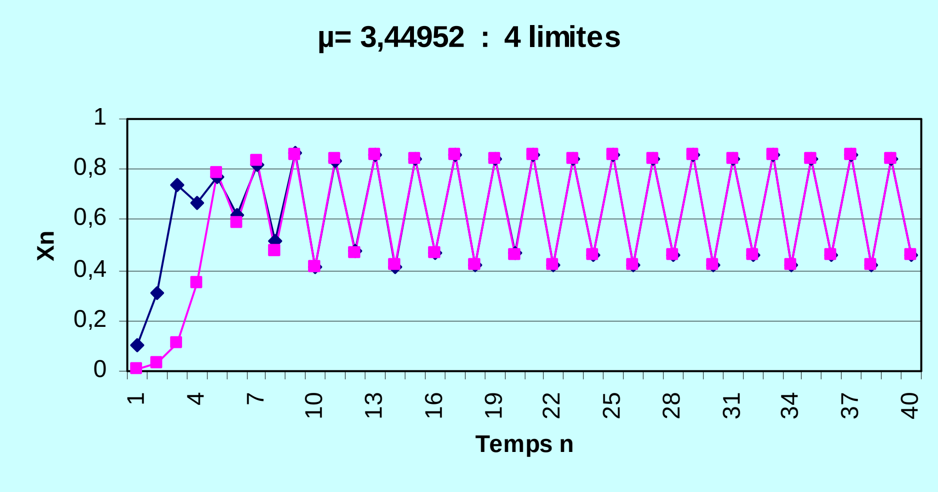
Le concept de trajectoire perd son sens, et son efficacité!

Fonction de Pierre Verhulst : $f(x) = \mu x(1 - x)$

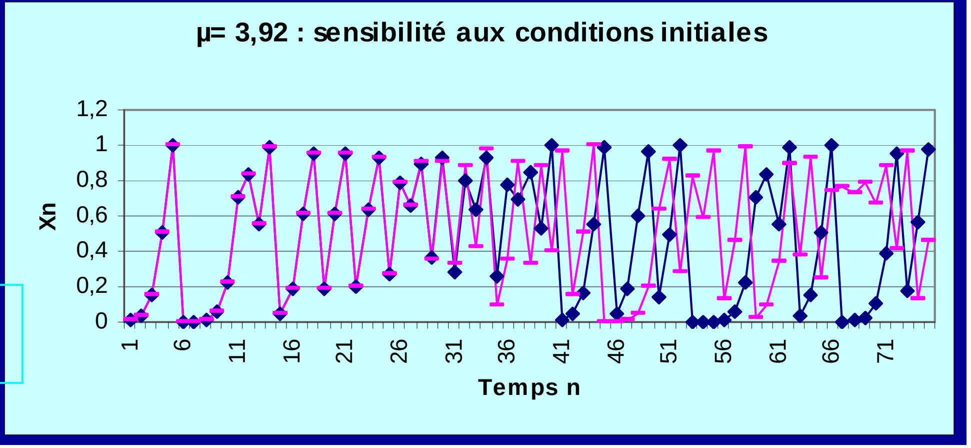
$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad \text{et } x_0 \text{ compris entre 0 et 1}$$

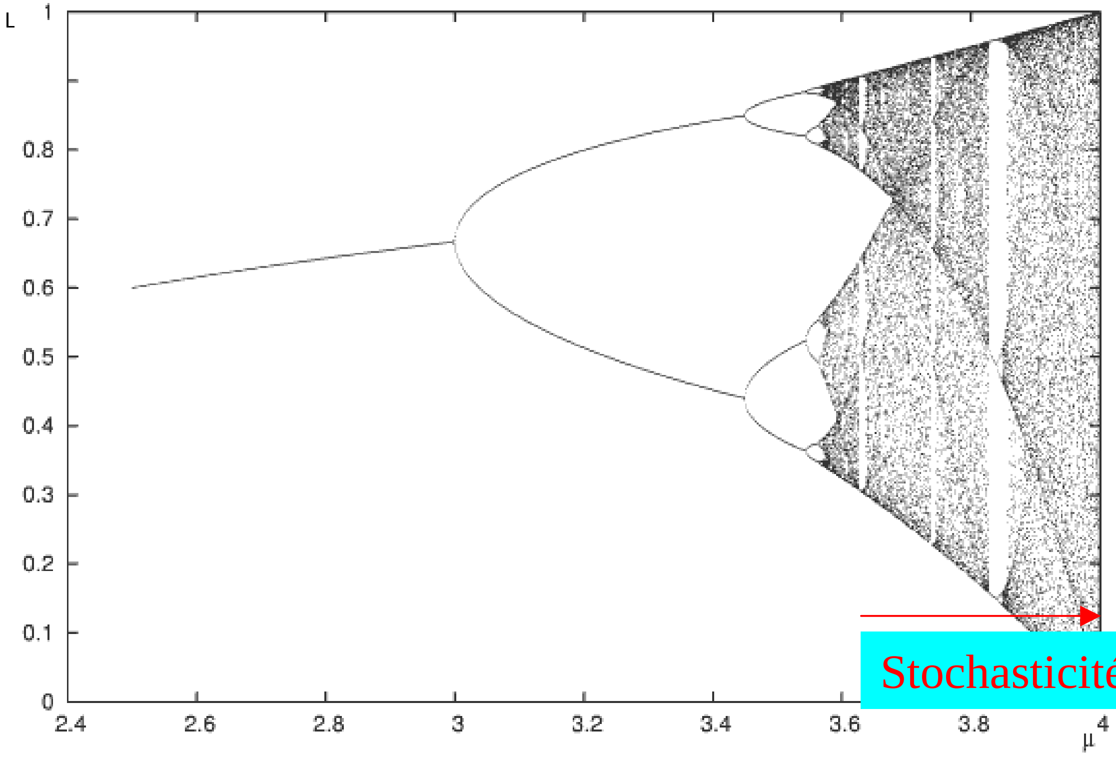






Etat chaotique →





Expérience sur la boussole : même résultat : → cascade de dédoublement de fréquences: →f →f, f/2 →f, f/2, f/4….

Les systèmes non intégrables sont abondants :

ne peuvent être décrits par la Mécanique réversible

→On doit renoncer aux trajectoires : résonance = les couplages ne se produisent pas en un point de l'espace.

→ Le traitement statistique élimine les divergences et brise la symétrie du temps.

→*Large poincare's systems* (LPS) --- Interactions persistantes : particule-champ.

(voir I. Prigogine)

Une nouvelle science: la thermodynamique

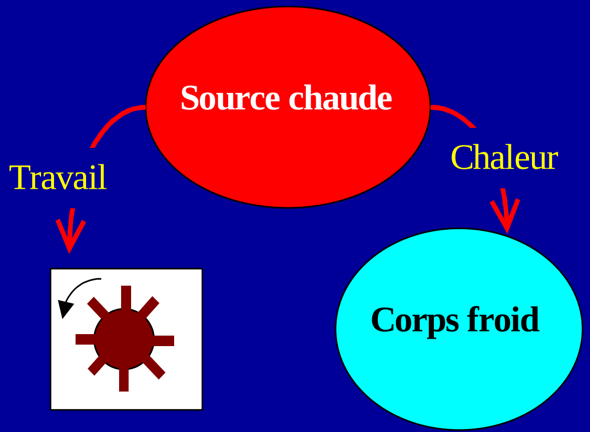
L'initiateur : Sadi Carnot(1796-1832)

Premiers éléments du second principe (l'irréversibilité) (1824) dans « *Réflexion sur la puissance motrice du feu et les machines propres à développer cette puissance* ».

Les premiers continuateurs : premier principe (conservation de l'énergie) par

Robert Meyer (1842) James P. Joules (1843) Hermann Helmholtz (1847)

Le continuateur averti : Rudolf Clausius introduit ***l'entropie*** (1865) et énonce le second principe.



Le corps froid gagne plus d'entropie que le corps chaud n'en perd.

Chaleur $\underset{\textbf{Transformation complète}}{\longrightarrow}$ **Travail** : Impossible

Entropie caractérise le degré d'irréversibilité

↓

L'énergie se conserve (quantité) mais se dégrade (qualité).

La chaleur selon le second principe présente des caractéristiques bien curieuses pour la pensée mécanique :

- La chaleur d'un corps n'a pas de sens : La chaleur se transmet .
- Les énergies peuvent être **équivalentes** en tant que quantités **mais différentes** en tant que qualités : la physique doit tenir compte de cette qualité !

La dégradation de l'énergie fixe phénoménologiquement la flèche du temps thermodynamique et crée un paradoxe avec la réversibilité mécanique :

→ des controverses.

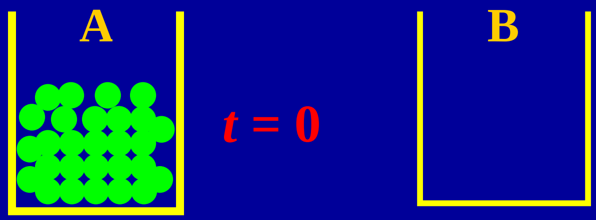
Retour à Bergson

« […] Il en est autrement du second principe de la thermodynamique. La loi de dégradation de l'énergie, en effet, ne porte pas essentiellement sur des grandeurs […] elle est la plus métaphysique des lois de la physique, en ce qu'elle nous montre du doigt, sans symboles interposés, sans artifice de mesure, la direction où va le monde ». *L'évolution créatrice*.

Explication statistique

↓

Les urnes d'Ehrenfest (processus de Markov)



N balles **0 balle**

Balles numérotées. Nombre N important.

A intervalle régulier, on fait un tirage aléatoire d'un numéro de balle :

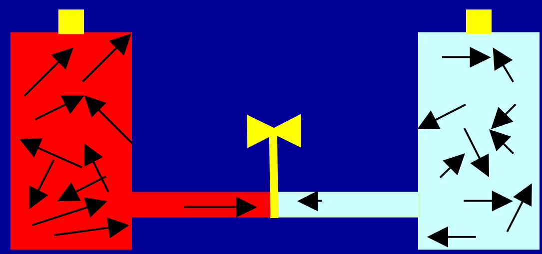
- si la balle est dans A $\rightarrow$ transfert vers B

- si la balle est dans B $\rightarrow$ transfert vers A

Au bout d'un temps relativement long, ce processus converge vers ***N/2*** balles dans A et ***N/2*** balles dans B : équilibre avec fluctuations. (Th. de récurrence de Poincaré !)

Ce processus peut-il décrire l'évolution vers l'équilibre d'un système thermodynamique ?

Molécule $\overset{??}{\equiv}$ Balle numérotée



Chaud **Froid**

A titre historique

LA TENTATIVE DE BOLTZMANN

une ouverture vers la science des processus

Qu’est-ce qui mène irréversiblement un système vers l’équilibre ?

Hypothèse

Gaz dilué $\rightarrow$ Collisions (binaires) entre particules.

Problème $\rightarrow$ Comment traiter ces collisions ?

Chemin $\rightarrow$ Faire un mélange de Mécanique et de Statistique.

Gaz sans collisions entre particules

Fonction de distribution à une particule : $f(r,p,t) \rightarrow r \equiv (x,y,z)$ **et** $p \equiv (p_x p_y p_z)$

A une dimension : $$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0 \quad \left(= \frac{df}{dt} \right)$$

A trois dimensions : $$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}_r f = 0$$

Gaz avec collisions

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}_r f = Q(f) \qquad Q(f) = Création + disparition$$

Boltzmann aboutit à l'équation invariante par renversement du temps :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}_r f = Q(f) = \int dp_2 \int \left[d\Omega \sigma(\Omega) |v_1 - v_2| \left(f' f_2' - f f_2 \right) \right]$$

Boltzmann a montré aussi (Théorème H) que la fonction H définie par :

$$H = k \int dpf \log f \quad (= -S)$$

est décroissante jusqu'à l'équilibre. L'entropie S augmente jusqu'à sa valeur maximale.

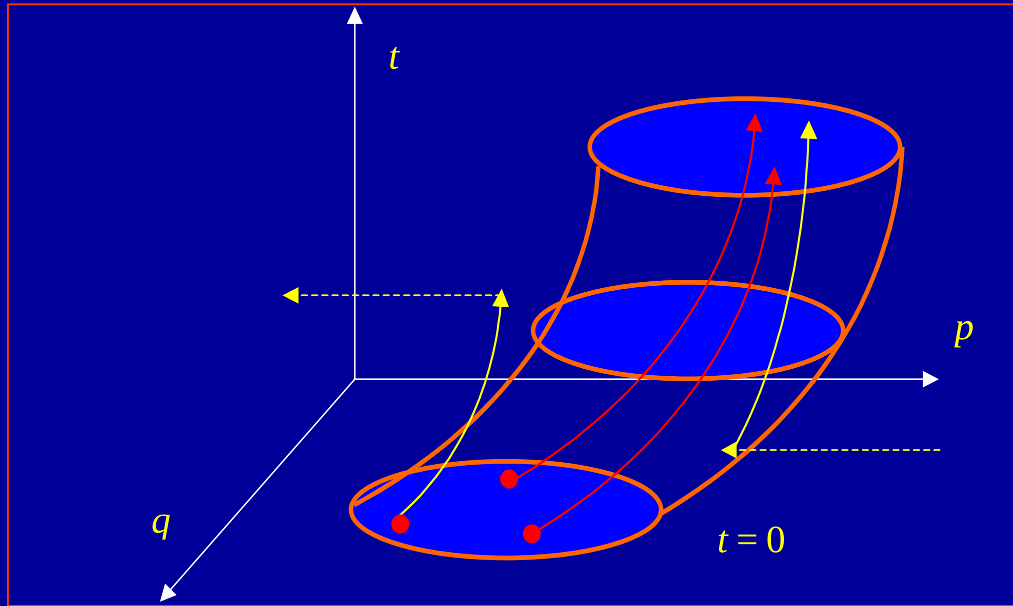
Collisions

↓

Disparition et création de particules

↓

modification du flot dans l'espace des phases



L'hypothèse importante de Boltzmann : le chaos moléculaire

Absence de corrélations des vitesses des deux molécules avant leur collision : les particules ne transportent pas d'information sur les collisions qu'elles ont effectuées auparavant : gaz dilué.

Reformulation

La mémoire des corrélations, des vitesses de deux particules est perdue avant une nouvelle collision : si τ_c est la durée de la collision et τ_{cc} la durée moyenne entre 2 collisions. On a : $\tau_c \ll \tau_{cc}$.

Après 40 ans de travail sur la théorie cinétique, les malheurs de Boltzmann ont débuté avec sa publication de 1872 : oppositions soutenues de J. J Loschmidt, A. Zermelo, H. Poincaré…

Paradoxe Zermelo-Poincaré

Le théorème de Poincaré impliquerait que l'entropie doit être plutôt une fonction périodique. Pour les systèmes réels ce temps est de l'ordre de $10^{10^{10}}$ années. Il en résulte que cet argument n'a aucun sens pratique.

POURTANT

→ La théorie de Boltzmann est correcte. Elle a même un équivalent quantique.

→ Naissance de la Physique statistique.

→ Importantes applications, en particulier dans les semiconducteurs.

Après Boltzmann, on sait que la tendance vers l'équilibre est une tendance vers un état du plus grand désordre. Plus le désordre croît, plus l'information sur les détails microscopiques diminue. →

« Une feuille de cuivre a une entropie plus basse que le minerai d'où elle est extraite »!

L'entropie de Shannon ou l'irréversibilité et l'information

C. Shannon et W. Weaver 1948

Exemple: compétition d'athlétisme

- Chaque concurrent *m* a une probabilité p_m de gagner.

- En apprenant que c'est *m* qui a gagné, on a une information I_m.

L'information doit être décroissante avec la probabilité et doit être additive. Donc, la quantité d'information véhiculée par un message *m* est :

$$I_m = \log_2 \frac{1}{p_m}$$

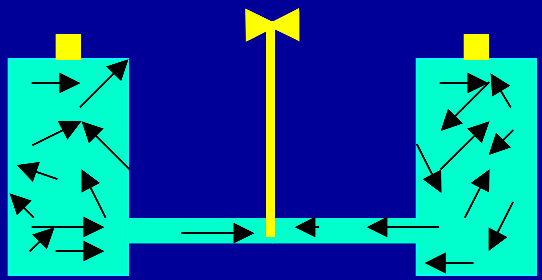
Plus le message est inattendu plus la quantité d'information est importante.

Cas de 2 possibilités (pile ou face) $p_m = 1/2$: $I_m = \log_2 2$. Ce qui définit le bit.

Avant la transmission de l'information, le destinataire ne connaît que la liste des concurrents (ou messages possibles) *m*. On mesure son incertitude ou son manque d'information par la moyenne des informations I_m :

$$I = \sum_m p_m I_m = -\sum_m p_m \log_2 p_m \quad \Leftrightarrow \text{Entropie}$$

Le démon de Maxwell (1867)



Equilibre à la température T

Pour les molécules allant de A vers B :

- Ouverture pour les molécules rapides.

- Fermeture pour les molécules lentes.

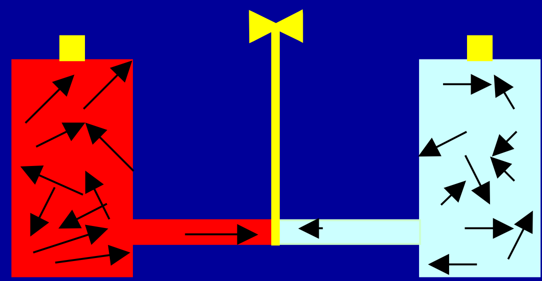
Pour les molécules allant de B vers A. Situation inverse

Conséquences

Violation du second principe de la thermodynamique :

- Transformation de l'énergie inutilisable en énergie utilisable.

- Diminution de l'entropie.



Chaud **Froid**

Exorcisation du démon

Léon Brillouin introduit l'information en Physique

« Qu'il soit un démon de Maxwell ou un physicien, l'observateur ne peut obtenir un bit d'information que lorsqu'une certaine néguentropie est perdue. » L. Brillouin. 1950.

- Le démon doit disposer d'une quantité d'information sur les molécules $\Delta I = \frac{\Delta S}{k}$: le démon communique au gaz cette information ou cette entropie basse qu'il avait.

- Le démon utilise une torche (lumière directive: entropie basse) : les molécules diffusent la lumière dans toutes les directions (rayonnement à entropie élevée).

Dans toute mesure on utilise un appareil dans lequel se produisent des transformations irréversibles : le monde que nous observons n'est pas indépendant de nous.

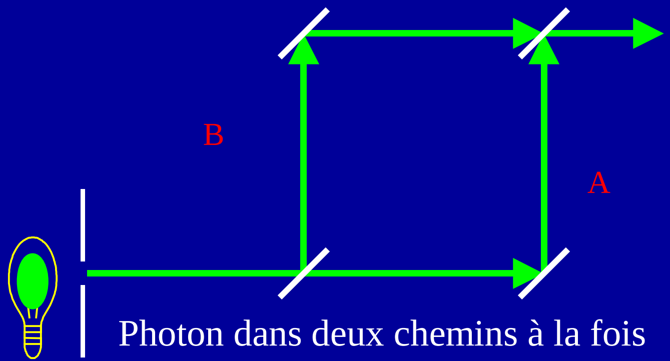
Nous avons pourtant nié le temps, notre temps, dans l'espoir de connaître , à partir des trajectoires, le monde physique qui nous entoure!!

L'effondrement de la trajectoire

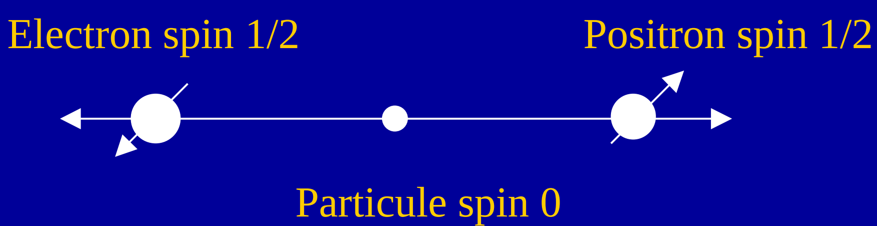
Si la description réelle doit se faire à l'échelle microscopique, la mécanique classique est insuffisante pour décrire, à partir d'une certaine échelle, le comportement des systèmes.

La mécanique quantique est une Physique non locale :

par nécessité



Photon dans deux chemins à la fois



2 particules intriquées

Description par fonction d'onde (amplitude de probabilité)

Les axiomes « orthodoxes » : le début des vrais problèmes

Je ne présenterai que les axiomes qui nous concernent ici

↓

Axiome de correspondance

Système $\longrightarrow$ Espace vectoriel de Hilbert $\boldsymbol{H}$

L'hamiltonien H correspond à la grandeur énergie

Etat du système $\longrightarrow$ vecteur $|\Phi\rangle$ de $\boldsymbol{H}$

Grandeur physique g $\longrightarrow$ opérateur autoadjoint G

Axiome d'évolution

Equation de schrödinger $\quad i\hbar \dfrac{d|\Phi\rangle}{dt} = H|\Phi\rangle$

Intégration formelle $\quad |\Phi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}|\Phi\rangle$

Opérateur unitaire $\quad U_H = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$

Réversibilité assurée

Axiome de mesure

Réduction de la fonction d'onde $\longrightarrow$ Le système se trouve dans l'état sélectionné par la mesure

Irréversibilité retrouvée !!

Que des problèmes, mais un grand succès…

$\longrightarrow$ Tout va bien en dehors de la mesure. MAIS mesure = interaction

Les axiomes de la MQO ne permettent pas la description des systèmes en constante interaction : échange d'énergie, d'information, dissipation…

Dissymétrie entre AVANT et APRES la mesure. Que se passe-t-il pendant la mesure ?

$\longrightarrow$ Où est le temps ? Où est son opérateur ? $\longrightarrow$

$$[P, X] = PX - XP = -i\hbar I \quad \rightarrow \quad \Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Or, on a $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ mais pas $[H, T] = -i\hbar I$

$\longrightarrow$ Q et P ne commutent pas $\rightarrow$ 2 représentations possibles de la fonction d'onde

<u>A une dimension *q* = *x*</u>

$$\boldsymbol{P \equiv -i\hbar \frac{d}{dx} \underset{\text{vecteur propre}}{\longrightarrow} e^{ikx} \notin H \quad \text{car non normable} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{ikx} dx = \infty}$$

« J'aimerais faire une confession qui peut paraître immorale, je ne crois plus à l'espace de Hilbert » John von Newmann.

Entropie de Von Neumann

Mécanique classique réversible: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] = -iL\rho$$

Mécanique quantique : équation similaire $$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho]$$

Sauf que là, on a un commutateur : $L = [H, \rho] = (H\rho - \rho H)$

C'est l'équation de Liouville-von Neumann $$\frac{d\rho}{dt} = -i\frac{L}{\hbar}\rho,$$

qui s'intègre formellement : $$\rho(t) = \rho(0)e^{-i\frac{L}{\hbar}t}$$

Probabilité p_i = valeurs propres de ρ

Entropie de Von Neumann : $S = -k\sum_i p_i \log p_i = -k\,\mathrm{Tr}[\rho \log \rho]$

Cas pur: le système est connu ou préparé à $t = 0$ dans l'état $|\Phi\rangle$:

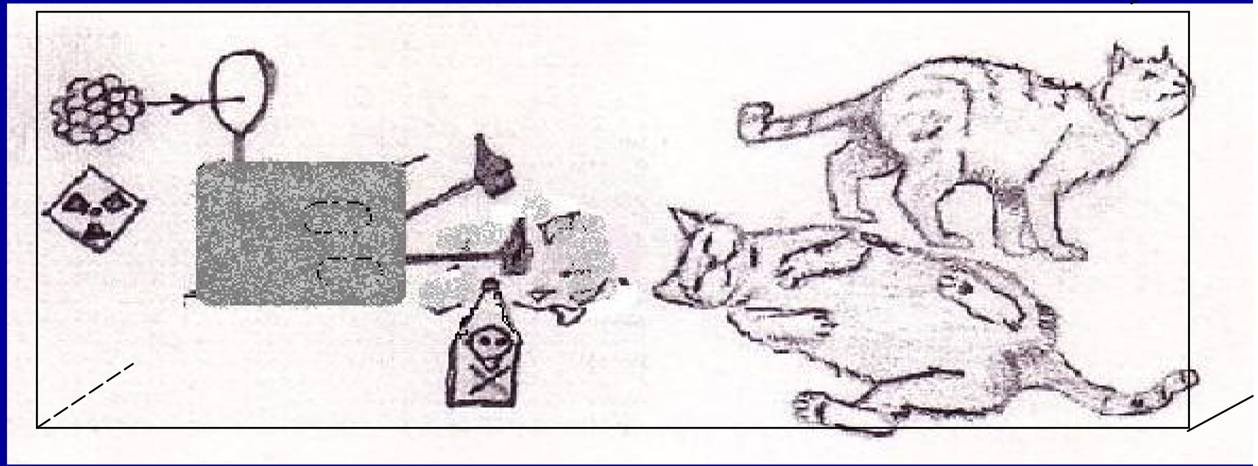
$$\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi| \qquad S(t) = S(0).$$

Cas du mélange incomplètement connu ou mal préparé dans des états $|\Phi_i\rangle$:

$$\rho = \sum_i |\Phi_i\rangle p_i \langle\Phi_i| \qquad S(\rho(t)) \geq S(\rho(0))$$

Là encore le hasard est producteur d'irréversibilité

Le chat est superposé avant l'observation →



Situations macroscopiques jamais observées

Spin pointant dans 2 directions à la fois : **intrication** de l'appareil de mesure avec le spin de la particule.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow> + |\downarrow>\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow> + |\downarrow>\right)$$

Une explication possible

L'appareil de mesure interagit avec l'environnement

L'environnement acquiert de l'information sur le système : il le localise ⟶ décohérence.

Décohérence = Dissipation ⟶ irréversibilité

Hilbert contre Hilbert…

Solution exacte de l'équation de Schrödinger : pour un système idéal.

$\longrightarrow$ L'atome d'hydrogène, problèmes à 2 corps.

La Mécanique quantique rencontre les difficultés dès l'atome d'hélium

Systèmes à spectre discret : solutions raisonnables avec des approximations perturbatives.

Systèmes à spectre continu : aucune issue dans l'espace de Hilbert.

Opérateurs autoadjoints non bornés $\longrightarrow$ similitude $\longrightarrow$ divergences de Poincaré : résonances

Extension de l'espace de Hilbert : l'espace généralisé

$\varphi \in \Psi$ **: espace test** $\qquad$ $\Phi \in \Psi^*$ **: espace des vecteurs généralisés (rigged Hilbert space)**

Le produit scalaire est défini : $\langle \Phi | \varphi \rangle$ **est fini.**

Extension de l'action des opérateurs: de Hilbert à Hilbert généralisé

Pour tout opérateur *A*, l'extension est définie par : $\langle A\Phi | \varphi \rangle = \langle \Phi | A^+ \varphi \rangle$

L'opérateur adjoint ne doit pas sortir de l'espace test : $A^+ \varphi \subseteq \Psi$

Cette condition va briser la symétrie du temps

L'irréversibilité intrinsèque

Principaux travaux : I. Prigogine (Belgique) – T. Petrosky (USA) - M. Courbage (France)

Travail sur un modèle

Modèle très simple, bien connu, sur lequel on vérifie certains calculs. Il s'agit de l'interaction d'un état discret instable $|1\rangle$ avec un continuum $|\boldsymbol{k}\rangle$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \lambda \boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{H} = \omega_1 + |1\rangle\langle 1| + \int_0^\infty \boldsymbol{d}\omega\,\omega|\omega\rangle\langle\omega| + \lambda \int_0^\infty \boldsymbol{d}\omega \boldsymbol{V}_\omega\left(|\omega\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle\omega|\right)$$

(Modèle de Friedrichs)

Ce problème se résout bien dans l'espace de Hilbert généralisé où les *valeurs propres* peuvent être *complexes*. On trouve :

- transition de l'état discret vers le continuum: désexcitation ou transition mode-mode →

$$\boldsymbol{H}|\Phi_1\rangle = \hbar\left(\omega - \boldsymbol{i}\frac{\gamma}{2}\right)|\Phi_1\rangle \qquad \gamma > \boldsymbol{0}$$

(vers le futur)

- transition du continuum vers l'état discret : excitation de la particule →

$$\langle\tilde{\Phi}_1|\boldsymbol{H} = \hbar\left(\omega - \boldsymbol{i}\frac{\gamma}{2}\right)\langle\tilde{\Phi}_1| \qquad \gamma > \boldsymbol{0}$$

(vers le passé)

L'espace de Hilbert généralisé

- pour t > 0 l'espace test Ψ_+ auquel correspond un espace de vecteurs généralisés (son dual) Ψ_+^*.
- pour t > 0 l'espace test Ψ_- auquel correspond un espace de vecteurs généralisés (son dual) Ψ_-^*.

L'espace de Hilbert généralisé est $\Psi = \Psi_+^* + \Psi_+^*$

Extension de l'opérateur évolution $U_t = e^{iHt}$ à l'espace $\Psi = \Psi_+^* + \Psi_+^*$

$$\Phi_1 \quad \textbf{dans l'espace } \Psi_+^* \quad \rightarrow \quad \langle U_t \Phi_1 | \varphi \rangle = \langle \Phi_1 | U_t^T \varphi \rangle \qquad \varphi \in \Psi_+ \underset{lemme}{\Rightarrow} |U_t \varphi\rangle \in \Psi_+$$

$$\tilde{\Phi}_1 \quad \textbf{dans l'espace } \Psi_-^* \quad \rightarrow \quad \langle U_t \tilde{\Phi}_1 | \varphi \rangle = \langle \tilde{\Phi}_1 | U_t^T \varphi \rangle \qquad \varphi \in \Psi_- \underset{lemme}{\Rightarrow} |U_t \varphi\rangle \in \Psi_-$$

L'extension a donc détruit la structure du groupe unitaire :

-U_t n'est plus inversible.

- U_t s'est décomposé en 2 semi-groupes isométriques.

Conséquences

- Contrairement à ce que pensait Boltzmann, l'irréversibilité n'a pas seulement une origine macroscopique: l'irréversibilité est intrinsèque, fondamentale.

- On a une décroissance exponentielle, ce qui est effectivement observé dans des problèmes similaires, mais ce qui n'était pas possible avec des valeurs propres réels :

$$U_t|\Phi_1\rangle = e^{iHt}|\Phi_1\rangle = e^{-\frac{\hbar\gamma}{2}t}\left[e^{-i\hbar\omega t}|\Phi_1\rangle\right] \qquad \textbf{pour } t > 0$$

Cette irréversibilité accompagne le processus de désexcitation d'atomes ou la désintégration de particules instables : transfert d'énergie mais pas d'approche vers l'équilibre.

C'est donc à l'échelle de la densité de probabilité, pour un système collectif, qu'il faut sortir de l'espace de Hilbert.

L’espace des densités de probabilité et son opérateur évolution

Dans Hilbert généralisé, agit H : $i\hbar \dfrac{d|\Phi\rangle}{dt} = H|\Phi\rangle \underset{\text{intégration formelle}}{\rightarrow} |\Phi(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\frac{H}{\hbar}t}}_{U_H} |\Phi\rangle$

Dans ???????????????, agit L : $i\hbar \dfrac{d\rho}{dt} = L\rho \underset{\text{intégration formelle}}{\rightarrow} \rho(t) = \underbrace{e^{-i\frac{L}{\hbar}t}}_{U_L} \rho$

L’espace des opérateurs *densités* est l’espace de Liouville $\mathcal{L}$

L’opérateur densité ρ agit sur les éléments $|\Phi\rangle$ de l’espace de Hilbert généralisé Ψ

L’opérateur de Liouville L agit sur les éléments ρ de l’espace de Liouville $\mathcal{L}$.

Notation : $|\rho_\nu\rangle\rangle = |\Phi_a\rangle\langle\Phi_b|$ **où** $|\rho_\nu\rangle\rangle \in$ **espace de Liouville**

$$L\,|\rho_\nu\rangle\rangle = Z_\nu|\rho_\nu\rangle\rangle \quad \begin{pmatrix} Z_\nu \text{ : valeurs propres complexes} \\ |\rho_\nu\rangle\rangle \text{ : distributions complexes} \end{pmatrix}$$

Le liouvillien L n'est pas factorisable en termes de fonctions d'ondes de l'espace de Hilbert même généralisé : sa représentation dans l'espace de Liouville est irréductible : un « effondrement » de la fonction d'onde, similaire à « l'effondrement » de la trajectoire en MQ. Sens large du mot « effondrement ».

Représentation de L dans $\mathcal{L}$

$$R_\nu = |\rho_\nu\rangle\rangle\langle\langle\tilde{\rho}_\nu| \quad \rightarrow \quad L = \sum_\nu Z_\nu R_\nu$$

$$|\rho(t)\rangle\rangle = e^{-i\frac{L}{\hbar}t}|\rho(0)\rangle\rangle = \sum_\nu e^{-iZ_\nu t} R_\nu |\rho(0)\rangle\rangle$$

On introduit la fonction de Lyapounov $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \sum_\nu |\tilde{\rho}_\nu\rangle\rangle\langle\langle\tilde{\rho}_\nu|$$

Pour un super-état $|\rho\rangle\rangle$:

$$\mathcal{T} = \langle\langle\rho(t)|\mathcal{H}|\rho(t)\rangle\rangle - \langle\langle\rho(0)|\mathcal{H}|\rho(0)\rangle\rangle$$

$$\mathcal{T} = \left(e^{-2\Gamma_\nu t} - 1\right)\left[\langle\langle\rho(0)|\mathcal{H}|\rho(0)\rangle\rangle\right]$$

C'est un temps qui mesure « l'âge » ou le vieillissement de la densité de probabilité $|\rho\rangle\rangle$: c'est un temps interne selon Prigogine.

L’opérateur Temps ?

$\left[P, X\right] = PX - XP = -i\hbar I \quad \rightarrow \Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ **Or, on** $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ **mais on n'a pas** $\left[H,\ T\right] = -i\hbar I$

A priori, il est « possible » de trouver un opérateur *T* conjugué de *L* et non pas de *H*.

$$\left.\begin{array}{c} \langle\langle \rho | L | \rho \rangle\rangle \equiv \textbf{différences d'énergie} \\ \updownarrow \\ \langle\langle \rho | T | \rho \rangle\rangle \equiv \textbf{durées de vie} \end{array}\right\}$$

On montre (Prigogine) que cet opérateur existe si une condition d’**instabilité** est satisfaite : due aux résonances de Poincaré.

Evolution irréversible

(Interaction particule-champ)

$$\left[L, T\right] = -i\hbar I \quad \rightarrow \quad (\Delta L)_\rho (\Delta T)_\rho \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\left(\Delta T\right)$ représente l'age pour des particules instables.

Il est lié au viellissement de la densité de probabilité.

Le temps d’existence d’un événement fluctue dans un intervalle $\left]t_1, t_2\right]$.

CONCLUSION

En dehors des phénomènes déterministes, le problème du temps n'est pas résolu en Physique.

Mais les phénomènes déterministes sont exceptionnels.

Les phénomènes instables, les phénomènes chaotiques, ne sont pas exceptionnels, et montrent une irréversibilité intrinsèque. Ils font appel à une nouvelle conception qui n'a rien à voir avec l'ignorance attribuée à l'aspect statistique du second principe.

Le temps est une illusion dans un monde créé une fois pour toutes. Mais ce monde n'est pas le nôtre…

Une nouvelle aventure de la Physique a déjà commencé…