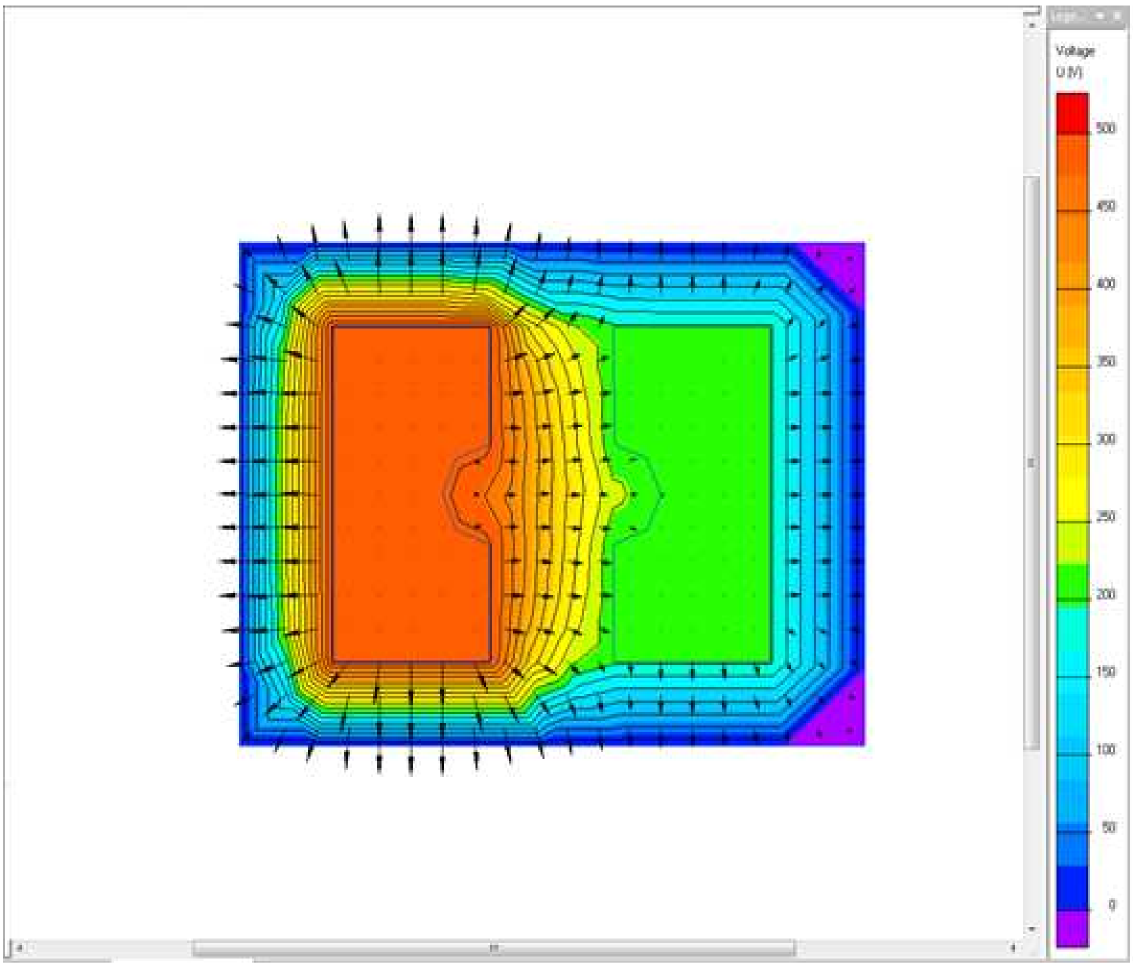
ELECTROSTATIQUE

S. KOUTANI



SOMMAIRE

ELEMENTS MATHEMATIQUES POUR L'ELECTROMAGNETISME

Les charges électriques peuvent être réparties sur une ligne, une surface ou dans un volume. Elles peuvent aussi présenter des éléments de symétrie. Nous verrons que les champs qu'elles créent dépendent en général de plusieurs directions et présentent des symétries.
D'où la nécessité et l'intérêt d'une connaissance des fonctions vectorielles à plusieurs variables.

L'analyse vectorielle est indispensable pour traiter des champs dans l'espace, et aussi dans le temps en général dans le cadre de l'Electromagnétisme.

Nous allons introduire des outils mathématiques, qu'il faut *bien considérer en tant qu'outils*, qui vont cependant prendre progressivement plus de signification avec l'avancement des concepts et des notions physiques.

I- CHAMP SCALAIRE ET CHAMP VECTORIEL

On rapporte l'espace à un repère cartésien $(Ox_1, O\,x_2, Ox_3)$.

1- Définition

Pour définir un champ scalaire, il suffit d'un nombre. Exemple : la masse, la charge électrique…
Un champ scalaire f est en général variable le long des directions de l'espace. En un point $M(x_1, x_2, x_3)$, où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes de *M*,

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

on a :

$$f(M) = f(x_1, x_2, x_3)$$

Pour définir un champ vectoriel, un nombre ne suffit pas. Il faut ajouter l'orientation, c'est-à-dire une direction et un sens. Exemple : la vitesse, la force…
Un champ vectoriel varie aussi en général avec les coordonnées de l'espace :

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$$

Pour les non initiés, il faut tenir compte de cette difficulté : comprendre qu'un scalaire n'est pas orienté selon une direction, lorsque ce même scalaire varie selon cette direction.

2- Dérivées partielles

Les dérivées partielles caractérisent la variation locale d'une fonction à plusieurs variables : pentes. (Les fonctions concernées sont différentiables)

Pour voir uniquement le comportement d'une fonction selon une direction, il faut « oublier » sa variation selon les 2 autres directions de l'espace.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$: dérivée partielle par rapport à x_1. On dérive la fonction en considérant x_2 et x_3 constants

$\frac{\partial f}{\partial x_2}$: dérivée partielle par rapport à x_2. On dérive la fonction en considérant x_1 et x_3 constants

$\frac{\partial f}{\partial x_3}$: dérivée partielle par rapport à x_3. On dérive la fonction en considérant x_1 et x_2 constants

3- L'opérateur $\vec{\nabla}$

C'est un vecteur dont les composantes sont les 3 opérations de dérivées partielles. Il agit sur les champs.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\overrightarrow{e_3}$$

Appliqué sur un champ scalaire, cet opérateur génère un champ vectoriel appelé gradient :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\overrightarrow{e_3}$$

4- Différentielle

On suppose l'existence (Pfaff).

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$$

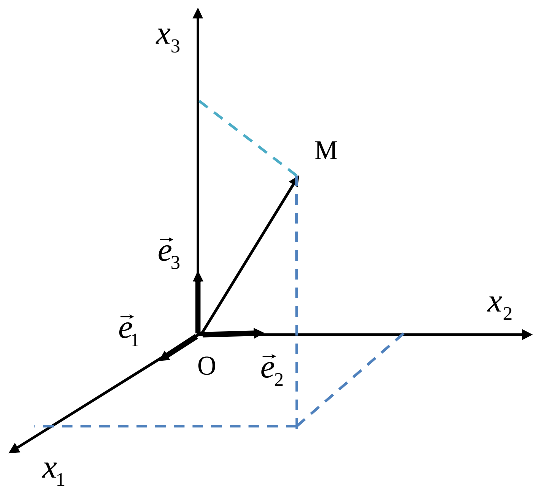
Constatant que les dx_i sont les composantes du vecteur déplacement,

$$d\overrightarrow{OM} = dx_1\overrightarrow{e_1} + dx_2\overrightarrow{e_2} + dx_3\overrightarrow{e_3} ,$$

on peut voir facilement que la différentielle de *f* est un produit scalaire :

$$df = \vec{\nabla} f \, . \, d\overrightarrow{OM}$$

II- COORDONNEES CARTESIENNES



$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$
$$f = f(x_1, x_2, x_3)$$
$$\vec{V} = \vec{V}(x_1, x_2, x_3)$$

Le vecteur déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dM} = dx_1\,\vec{e}_1 + dx_2\,\vec{e}_2 + dx_3\,\vec{e}_3$$

L'élément de volume :

$$d\tau = dx_1 dx_2 dx_3$$

Vecteur gradient d'un champ scalaire $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3)}$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\overrightarrow{e_3}$$

Divergence d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{\vec{V}(x_1, x_2, x_3)}$:

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

Rotationnel d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{V}(x_1, x_2, x_3)}$:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 - \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 \equiv \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

Le laplacien d'un champ scalaire $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

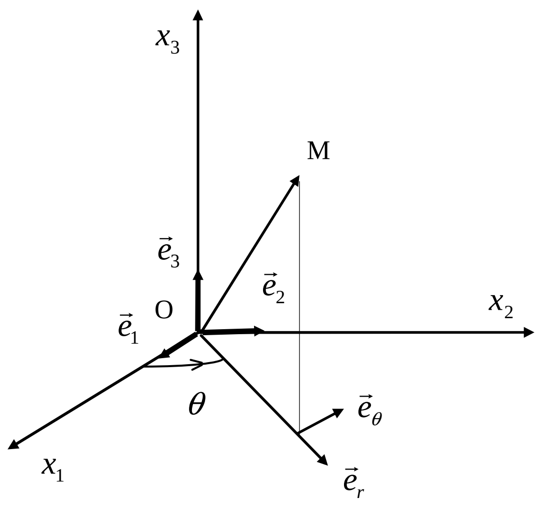
Le laplacien d'un champ de vecteurs $\vec{V}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta\vec{V} = \Delta V_1 \vec{e}_1 + \Delta V_2 \vec{e}_2 + \Delta V_3 \vec{e}_3$$

C'est-à-dire :

$$\Delta\vec{V} = \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2}\right)\vec{e}_3$$

III- COORDONNEES CYLINDRIQUES



$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

Le vecteur déplacement infinitésimal :

$$d\vec{M} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + dx_3\,\vec{e}_3$$

L'élément de volume :

$$d\tau = dr\,rd\theta\,dx_3$$

Vecteur gradient d'un champ scalaire :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{\partial f}{r d\theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\vec{e}_3$$

Divergence d'un champ de vecteurs :

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

Rotationnel d'un champ de vecteurs :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} \equiv \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ V_r & rV_\theta & V_3 \end{vmatrix}$$

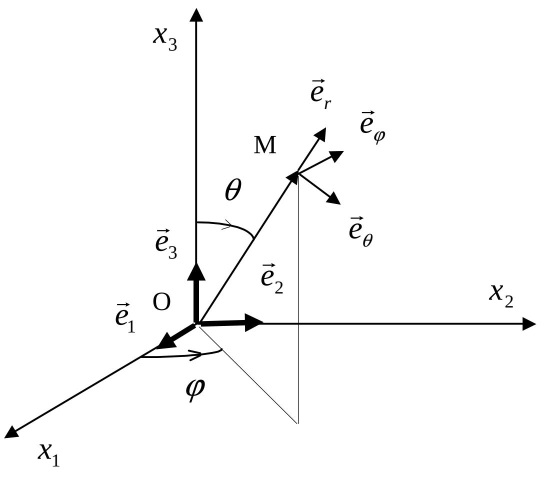
Le laplacien d'un champ scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}\right) + \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Le laplacien d'un champ de vecteurs :

$$\Delta\vec{V} = \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{\partial V_\theta}{r^2\partial\theta}\right)\vec{e}_r + \left(\Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + 2\,\frac{\partial V_r}{r^2\partial\theta}\right)\vec{e}_\theta + \Delta V_3\vec{e}_3$$

IV- COORDONNEES SPHERIQUES



$$\vec{M} = r\vec{e}_r$$
$$d\vec{M} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$
$$f = f(r,\varphi,\theta)$$
$$\vec{V} = \vec{V}(r,\varphi,\theta)$$

Le vecteur déplacement infinitésimal :

$$d\vec{M} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta + r\,sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

L'élément de volume :

$$d\tau = r^2\,sin\theta dr\,d\theta d\varphi$$

Exemple d'une sphère de rayon R

$$D = \int_0^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\,sin\theta dr\,d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\,\pi R^3$$

Vecteur gradient d'un champ scalaire :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{r\,sin\theta d\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Divergence d'un champ de vecteurs:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial(sin\theta\,V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$$

Rotationnel d'un champ de vecteurs:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V} \equiv \frac{1}{r^2\,sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\,\vec{e}_\theta & r\,sin\theta\,\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ V_r & rV_\theta & r\,sin\theta\,V_\varphi \end{vmatrix}$$

Le laplacien d'un champ scalaire :

$$\Delta\,f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^{\,2} sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Le laplacien d'un champ de vecteurs

$$\Delta\vec{V} = \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{\partial V_\theta}{r^2\partial\theta}\right)\vec{e}_r + \left(\Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + 2\,\frac{\partial V_r}{r^2\partial\theta}\right)\vec{e}_\theta + \Delta V_3\vec{e}_3$$

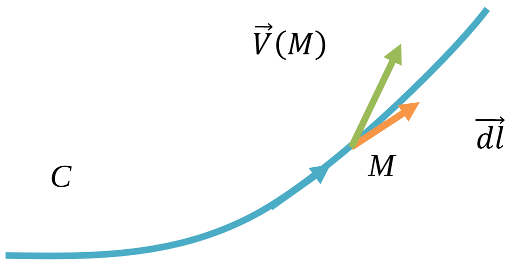
V- LES INTEGRALES SPATIALES

1- Circulation d'un champ de vecteurs

On appelle circulation du champ $\vec{V}(M)$ le long de la courbe C, l'intégrale :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \int_{C} \vec{V}(M)\,.\,\overrightarrow{dl}$$

La courbe *C* doit être orientée. La circulation Γ dépend en général du chemin suivi et cela a des conséquences intéressantes en Physique. On reconnaît le travail mécanique si le vecteur $\vec{V}(M)$ correspond à une force.



Si la courbe *C* est fermée, on note cette intégrale :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \oint_{C} \vec{V}(M)\,.\,\overrightarrow{dl}$$

Pas de panique ! Les problèmes physiques traités en Electrostatique de 1ère année se ramènent souvent à des situations où cette intégrale se calcule très simplement. Elle se réduit à l'intégrale d'une fonction scalaire d'une seule variable.

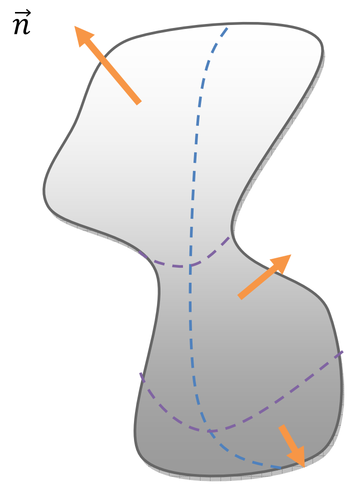
2- Flux d'un champ de vecteurs

a- Surfaces

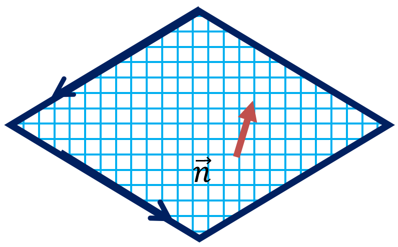
Le vecteur surface élémentaire est donné avec un vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire à la surface au point considéré.

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$$

- Si la surface est fermée, $\vec{n}$ est orienté par convention vers l'extérieur.



- Pour une surface non fermée, l'orientation du contour sur lequel s'appuie la surface définit l'orientation de $\vec{n}$: on utilise la règle du tire bouchon de Maxwell.



b- Flux

On appelle flux du champ vectoriel $\vec{V}(M)$ à travers la surface *S*, l'intégrale :

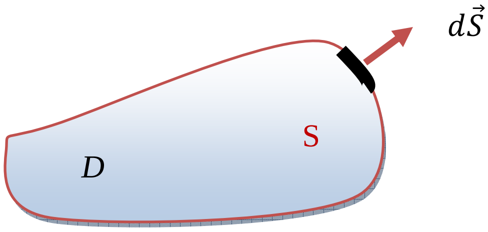
$$\Phi = \iint_S \vec{V}(M) \, . \, \overrightarrow{dS}$$

Pas de panique ! Les problèmes physiques traités en Electrostatique de 1ère année se ramènent souvent à des situations où $V(M)$ est constant sur la surface d'intégration.

VI- THEOREMES

1- Théorème de la divergence ou de Green-Ostrogradsky

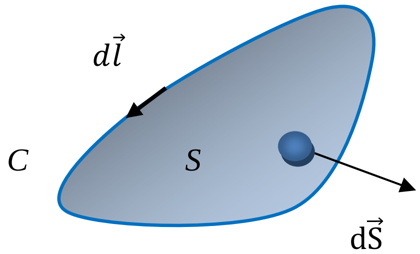
S est la surface fermée qui délimite le volume *D*.



$$\iiint_D \vec{\nabla}.\vec{V}\, d\tau = \oiint_S \vec{V}\,.\,d\vec{S}$$

2- Théorème du rotationnel ou de Stokes

C est la courbe (fermée) qui délimite la surface *S*.



$$\iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\,.\,\overrightarrow{dS} = \oint_C \vec{V}\,.\,\overrightarrow{dl}$$

3- Théorème du gradient

$$\iiint_D \vec{\nabla} f\, d\tau = \iint_S f\, \overrightarrow{dS}$$

VII- FORMULES LOCALES

$$\vec{\nabla}\left(f\vec{V}\right)=f\vec{\nabla}.\vec{V}+\vec{V}.\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(f\vec{V}\right)=f\vec{\nabla}\wedge\vec{V}-\vec{V}\wedge\vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}f\right)=0$$

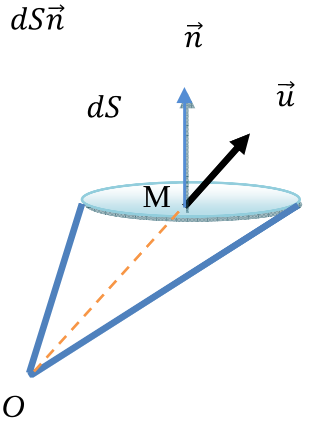
$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right)-\Delta\vec{V}$$

VIII- ANGLE SOLIDE

Soit la surface *dS* centrée autour du point *M*. *O* est le point d'observation : $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.
L'angle solide élémentaire pour voir l'élément *dS* à partir du point *O* est :

$$d\Omega=\frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{r^2}\ ,\ \text{avec}\ \ \overrightarrow{dS}=dS\vec{n}$$



L'angle pour observer une surface *S* finie :

IX-

$$\Omega=\iint_S\frac{dS\,(\vec{n}\,.\vec{u})}{r^2}$$

On peut montrer facilement que :

- L'angle solide pour observer un plan infini est égal à 2π.
- Et que pour observer une sphère (tout l'espace) l'angle solide correspond à 4π.

L'unité de l'angle solide est le stéradian.

CHAMP ELECTROSTATIQUE

I- CHARGES

La charge électrique est une propriété scalaire des particules élémentaires. Elle peut être positive, négative ou nulle, et s'exprime en Coulomb (*C*). C'est une grandeur quantifiée, c'est-à-dire que toute charge *Q* est telle que $|Q| = ne$, où $e = 1{,}6\,.\,10^{-19}\ C$ est la charge élémentaire, et *n* un entier naturel.

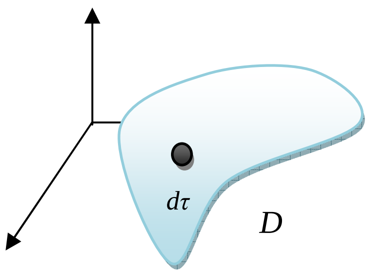
La charge peut être répartie de 2 manières : discrète ou continue.

Répartition discrète

$$q = \sum_i q_i$$

Répartition continue

- **Distribution volumique**



Au voisinage d'un point *P* du volume *D*, on a la densité :

$$\rho(P) = \frac{dq}{d\tau}$$

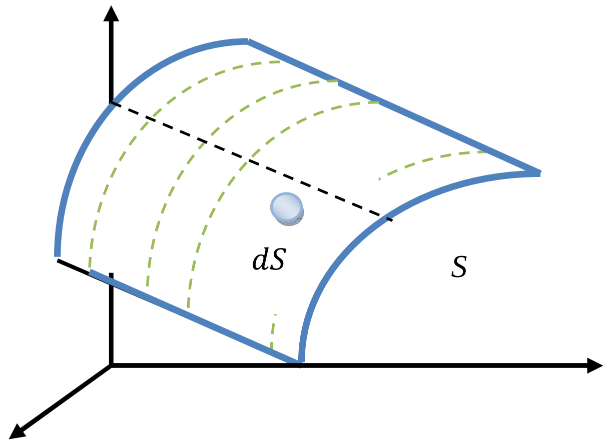
La charge de tout le volume *D* est :

$$q = \iiint_D \rho(P)d\tau$$

- **Distribution surfacique**

Au voisinage d'un point *P* de la surface *S*, on a la densité :

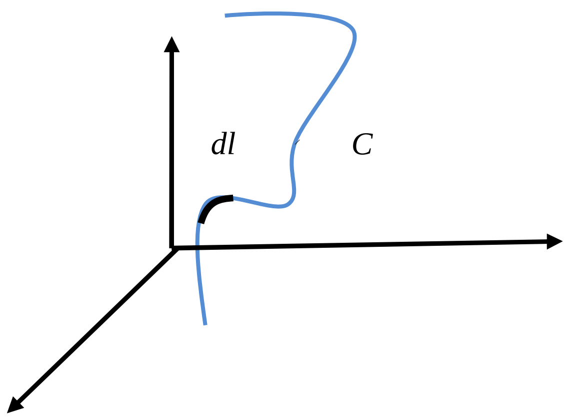
$$\sigma(P) = \frac{dq}{dS}$$



La charge portée par toute la surface S est :

$$q = \iint_S \sigma(P)\, dS$$

- **Distribution linéique**



Au voisinage d'un point P de la ligne C on a la densité :

$$\lambda(P) = \frac{dq}{dl}$$

La charge portée par toute la courbe C est :

$$q = \int_C \lambda(P)\, dl$$

II- FORCE DE COULOMB

L'interaction électromagnétique est l'une des 4 interactions fondamentales. En général, les charges peuvent être en mouvement et leurs vitesses varient dans le temps. L'interaction électrostatique est limitée aux charges « considérées » fixes. C'est donc un cas particulier de l'interaction électromagnétique.

Considérons 2 charges <u>ponctuelles</u> fixes q_A et q_B, séparées par une distance r_{AB} :

La force exercée par q_A sur q_B est :

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{q_A q_B \overrightarrow{r_{AB}}}{4\pi\epsilon_0\, r_{AB}^3} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12} = \frac{1}{4\pi}\frac{10^{-9}}{9} \quad (F/m)$$

$\overrightarrow{r_{AB}}$ étant dirigé de A vers B, l'orientation de la force dépend donc des signes des charges.

C'est une loi. Elle se vérifie expérimentalement.

On a évidemment (Principe de l'action et de la réaction – Newton) :

$$\vec{F}_{B/A} = \frac{q_A q_B \overrightarrow{r_{BA}}}{4\pi\epsilon_0\, r_{AB}^3} = -\vec{F}_{A/B}$$

III- CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Si on « factorise la perturbation » que crée q_A dans l'espace où se trouve q_B, on a :

$$\vec{F}_{q_A/q_B} = \frac{q_A q_B \vec{r}_{AB}}{4\pi\varepsilon_0 r_{AB}^3} = q_B \vec{E}_A(B)$$

$\vec{E}_A(B)$ est le champ électrostatique créé par la charge q_A au point *B*.

De manière générale, une charge placée en *O* crée en un point *M* le champ électrostatique

$$\vec{E}(M) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ , où } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

E s'exprime en V/m

IV- CHAMP CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGE

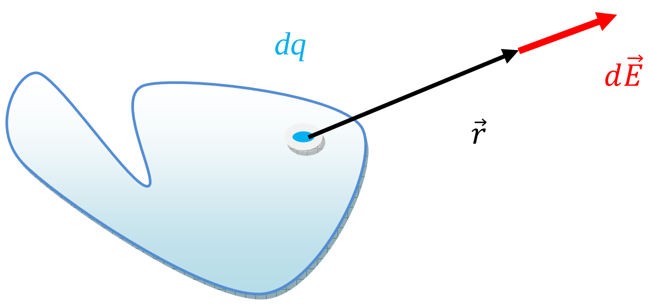
Il ne faut jamais oublier que ce que donne la loi de Coulomb, de laquelle est issu le concept du champ électrostatique, est relatif à des charges ponctuelles.

Comment faire alors pour les charges réparties ?

L'idée est d'assimiler le champ élémentaire créé par un élément de charge *dq* au champ créé par cette charge considérée comme charge ponctuelle :

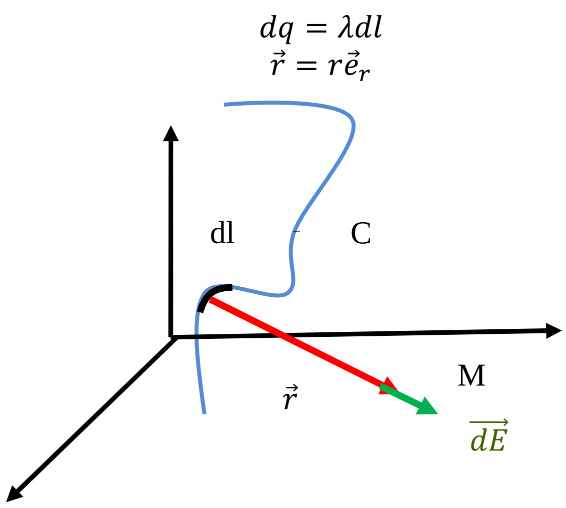
$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé de la position de *dq* vers M.

$d\vec{E}(M)$ est le champ élémentaire.



Il suffit d'intégrer sur le domaine chargé, pour avoir le champ créé par la distribution.
Examinons les 3 cas.

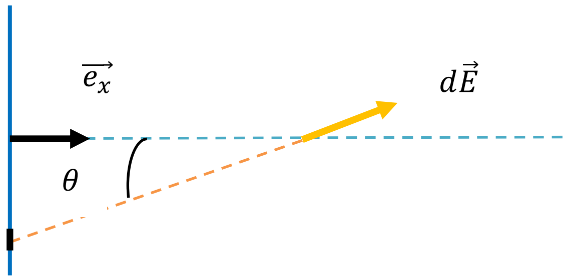
1- Distribution sur une courbe C :

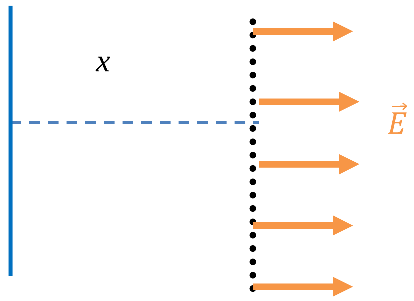


$$\vec{E}(M) = \int_C \frac{\lambda dl \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Exemple : champ créé par un fil infini, à une distance x.

Le champ est perpendiculaire au fil. Car chaque élément dl a son symétrique par rapport à l'origine, intersection du fil et de l'axe x.





Etapes du calcul :

-Projeter le champ selon l'axe x.
-Déterminer toutes les variables en fonction d'une seule, par exemple θ, car elles ne sont pas indépendantes.
- Intégrer sur le fil, c'est-à-dire pour θ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

On trouve :

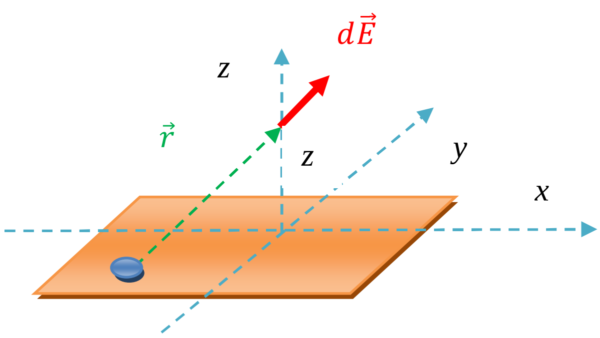
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{e}_x.$$

2- Distribution surfacique

$$dq = \sigma dS$$

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma dS \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Exemple : champ créé par un plan infini, à une distance z.



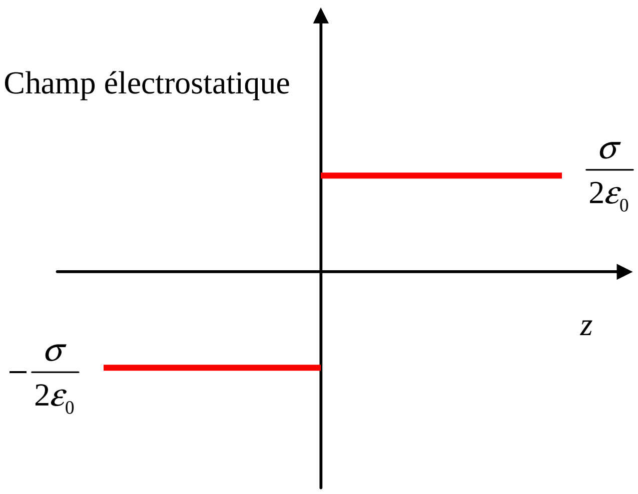
Chaque élément ayant son symétrique par rapport à l'origine, donc le champ est selon l'axe Oz.

Etapes du calcul :

- Projeter le champ selon l'axe O*z*.
- Déterminer toutes les variables en fonction d'une seule, car elles ne sont pas indépendantes.
- Intégrer. On peut faire le calcul pour un disque de rayon R et faire tendre ensuite ce dernier vers l'infini.

On trouve :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$



Noter la discontinuité du champ pour cette distribution surfacique.

3- Distribution volumique dans un domaine *D*

$$dq = \rho d\tau$$

$$\vec{E}(M) = \iiint_D \frac{\rho d\tau \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Le calcul est souvent long et compliqué pour ce type de distributions. Heureusement, il y a d'autres méthodes (voir plus loin).

V- PRINCIPE DE CURIE

« ***Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ; lorsque certains effets révèlent une certaine***

dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui leur ont donné naissance. »
Admirons la puissance du principe !!

Conséquences

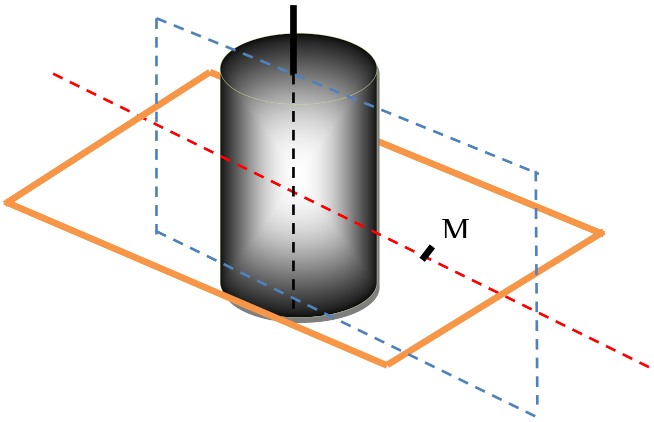
Le champ électrostatique doit présenter les mêmes éléments de symétrie que les charges qui lui ont donné naissance. En un point M de l'espace, le champ $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie passant par M.

Méthode

Il suffit de trouver 2 plans de symétrie passant par M. Le champ électrostatique est selon la direction-intersection.

Exemple

Distribution volumique d'un cylindre infini :

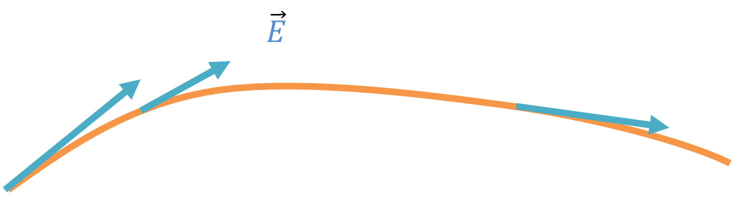


Direction radiale du champ électrostatique pour le point M considéré

VI- LIGNES DE CHAMP

1- Définition

Ce sont les courbes tangentes en chacun de leurs points au vecteur champ électrostatique.



2- Equations

En coordonnées cartésiennes : $$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques : $$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées sphériques : $$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\, d\varphi}{E_\varphi}$$

VII- THEOREME DE GAUSS

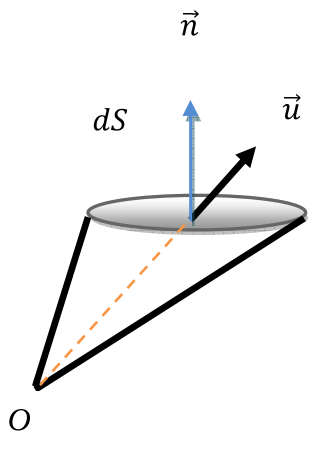
Ce théorème permet souvent un calcul simple du champ électrostatique.

1- Flux du champ électrostatique à travers une surface

Prenons le cas d'un champ créé par une charge ponctuelle.

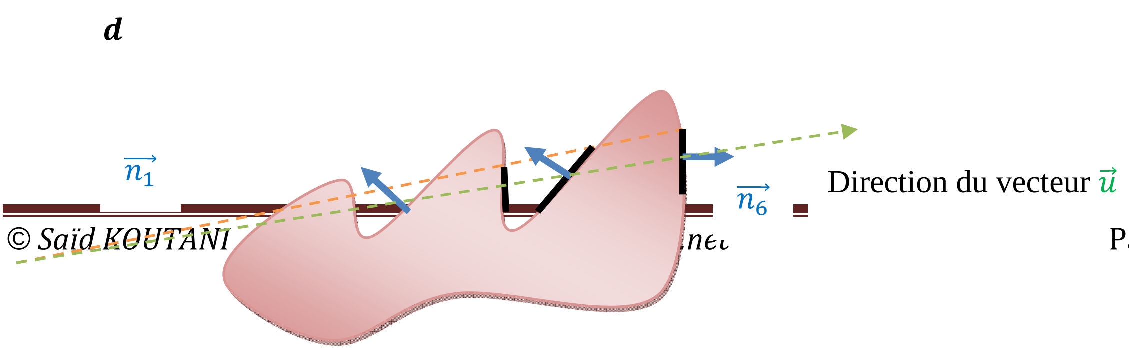
$$\Phi = \iint_S \frac{q\,\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.d\vec{S} = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

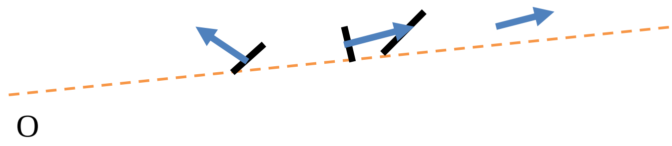
avec $\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}$



Cas d'une charge électrique extérieure à la surface fermée

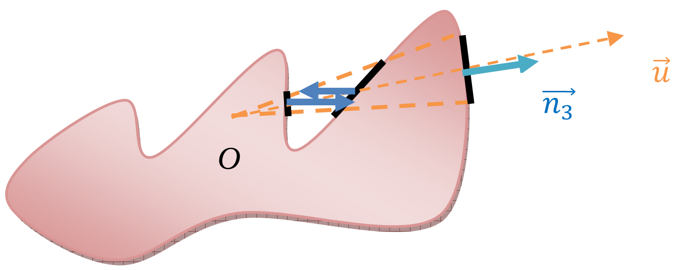
X-
On considère une charge ponctuelle q placée en O.





On voit que le flux dans ce cas est nécessairement nul, tenant compte de l'alternance des signes à cause des angles entre $\vec{n_i}$ et $\vec{u}$, et de la valeur du rapport $\left|\frac{dS\cos\theta}{r^2}\right|$.

Cas d'une charge électrique intérieure à la surface fermée



Là, le flux est différent de zéro. Et l'angle solide pour voir toute la surface fermée est égal à 4π.

On a alors :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

2- Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée S est égal au rapport de la charge intérieure q_{int} à S, sur la constante ε_0 .
Ce qui s'écrit :

$$\oiint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Intérêt :

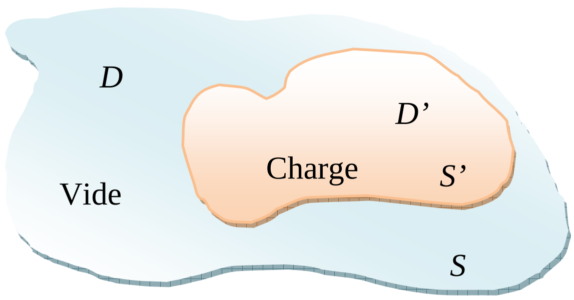
Ce théorème sert en particulier au calcul du champ électrostatique.

Procédure :

- Déterminer les orientations de $\vec{E}$ dans l'espace. Le principe de Curie est d'une grande utilité.
- Trouver les surfaces par rapport auxquelles le champ est parallèle ou perpendiculaire. Ce qui permettrait de déterminer la surface fermée impliquant une grande économie de calculs.
- Calculer l'intégrale. Et finalement en déduire $\vec{E}$.

3- Expression locale du Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \iiint_{D'} (\vec{\nabla}.\vec{E})\ d\tau = \iiint_{D} (\vec{\nabla}.\vec{E})\ d\tau = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_D \rho\ d\tau$$

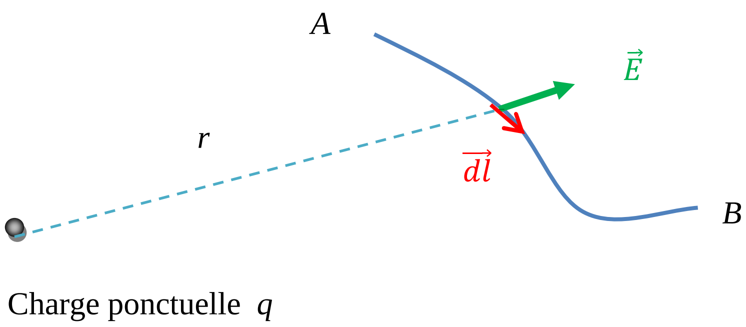


L'expression ci-dessus est vraie quel que soit le couple (S, D). On a donc :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

C'est l'une des équations locales de l'Electrostatique.

VIII- CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE



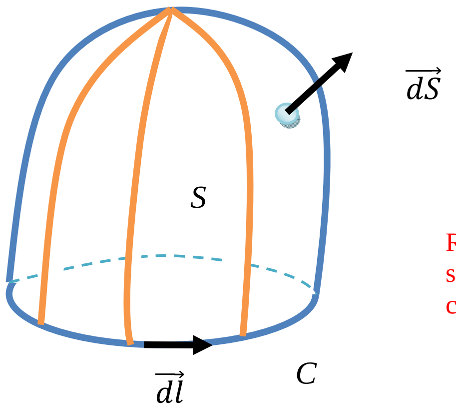
$$\int_C \vec{E}.\,d\vec{l} = \int_C \vec{E}.\,d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\vec{r}.\,d\vec{r}}{r^3}$$

Avec $\vec{r}^2 = r^2$, qui implique : $\vec{r}.\,d\vec{r} = r\,dr$, on a :

$$\int_C \vec{E}.\,d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

Si la courbe *C* est fermée et *S* une surface s'appuyant sur *C* :

$$\oint_C \vec{E}.\,d\vec{l} = 0$$



Remarquer l'orientation de la surface par rapport à celle du contour *C*.

Avec le théorème de Stokes, on déduit de l'équation précédente :

$$\iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{E})\,.\,\overrightarrow{dS} = 0$$

Quelque soit le couple (C, S), ces intégrales sont nulles. On a donc :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$$

Cette équation locale est l'une des équations de l'Electrostatique.

La conséquence importante de l'équation ci-dessus est l'existence d'une fonction scalaire *V*, telle que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\, V$$

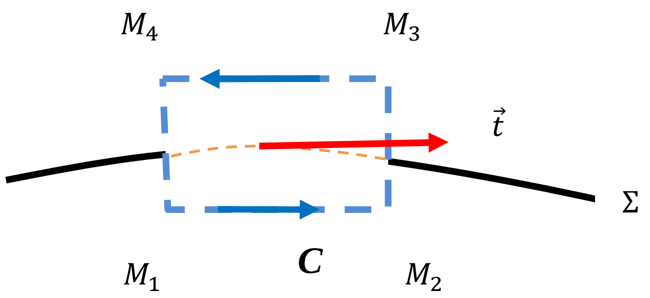
V est appelé potentiel électrostatique. Il s'exprime en Volts (*V*).
Cette fonction scalaire est continue à l'interface entre 2 milieux différents.

IX- EQUATIONS DE PASSAGE DU CHAMP ELECTROSTATIQUE ENTRE DEUX MILIEUX

Composante tangentielle :

On montre qu'à l'interface des deux milieux :

- La composante tangentielle du champ électrostatique est toujours continue.



La surface Σ sépare deux milieux 1 et 2. Les points M_1 et M_4 sont très proches, il en est de même pour l'autre couple M_2 et M_3.

Examinons la continuité, en considérant la circulation le long de la courbe *C*.

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0$$

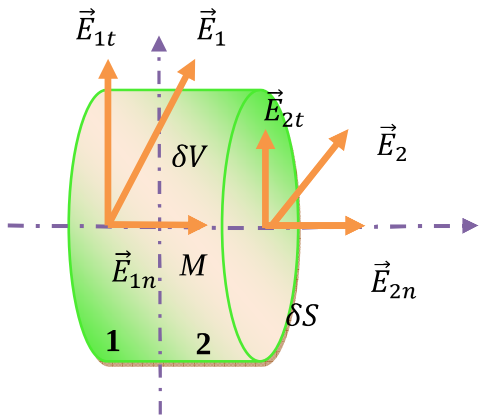
Ce qui implique :

$$\overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{M_3M_4} = 0$$

$$\overrightarrow{E_1}.\vec{t} - \overrightarrow{E_2}.\vec{t} = 0$$

Composante normale :

Soit δV un petit volume centré sur le point M. Appliquons le théorème de Gauss sur la surface englobant δV.



La hauteur du cylindre est considéré comme infiniment petite par rapport rayon.

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = (E_{2n} - E_{1n})\delta S = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\delta S}{\varepsilon_0}$$

Ce qui montre que la composante normale de $\vec{E}$ est discontinue si la surface de séparation qu'il traverse présente une densité de charge surfacique. Comme exemple, le milieu 1 peut être le vide et le milieu 2 un conducteur chargé.

$$(E_{2n} - E_{1n}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

X- POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

Le potentiel a été introduit à partir :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\mathrm{V}$$

En coordonnées cartésiennes on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = (\vec{\nabla}\,\mathrm{V}).\overrightarrow{dM} = -\vec{E}.\overrightarrow{dM}$$

$$E_1 = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right), E_2 = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) \text{ et } E_3 = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)$$

$$\int_A^B dV = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dr}$$

Si on calcule simplement la primitive $V = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dr}$, il apparaît une constante d'intégration à déterminer avec les conditions aux limites, du type :

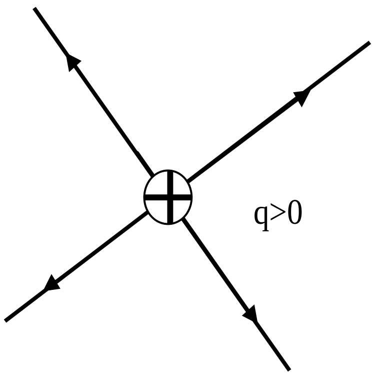
- $V(\infty)=0$ lorsqu'il n'existe pas de charges à l'infini.
- La continuité du potentiel en des points particuliers du système étudié.

1- Potentiel créé par une charge ponctuelle à une distance *r*

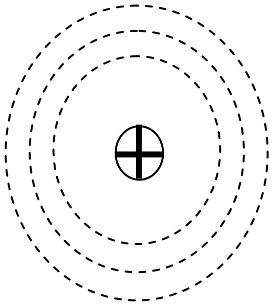
$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On va d'abord montrer que les surfaces équipotentielles sont toujours perpendiculaires aux lignes de champ.

Exemple d'une charge ponctuelle positive :



Lignes de Champ



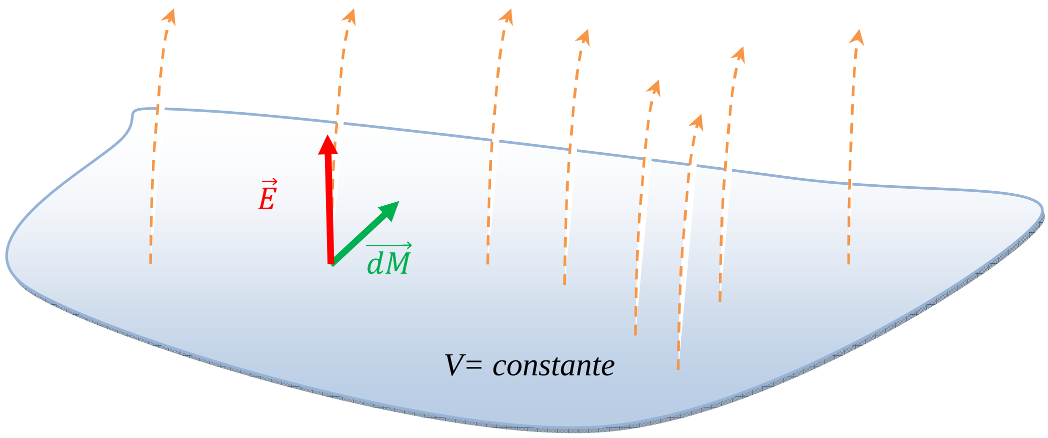
Surfaces équipotentielles : sphères concentriques

2- Surfaces équipotentielles

Sur la surface équipotentielle on a :

$$dV=-\vec{E}.\overrightarrow{dM}=0$$

On voit donc que les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles en tout point.



3- Potentiel créé par une distribution continue de charge

Distribution linéique sur une courbe C : $$V(M)=\int_C \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Distribution surfacique sur S : $$V(M)=\iint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Distribution volumique dans un domaine D : $$V(M)=\iiint_D \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4- Equation de Poisson

Il suffit d'injecter dans l'équation locale de Gauss l'expression : $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$:

$$\Delta V=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En coordonnées cartésiennes: $$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ENERGIE ELECTROSTATIQUE

I- TRAVAIL DES FORCES ELECTROSTATIQUES ET ENERGIE POTENTIELLE

Le travail élémentaire de la force électrique s'écrit :

$$\delta W = dW = q\left[E_{x_1}dx_1 + E_{x_2}dx_2 + E_{x_3}dx_3\right]$$

Le travail effectué lors du déplacement d'un point A à un point B est donc :

$$W = q(V_A - V_B)$$

La circulation de la force est nulle, car :

$$\oint_C \vec{F}\,.d\vec{l} = q\oint_C \vec{E}\,.d\vec{l} = 0$$

Ce qui implique que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_\mathrm{p}$, où $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ est une fonction scalaire correspondant à l'énergie potentielle.

Mais par définition, l'énergie potentielle de la charge est le travail fourni par l'expérimentateur pour l'amener de l'infini à sa position. Cette énergie est restituée à l'expérimentateur au retour de la charge à sa position initiale.

Pour une variation élémentaire, on a :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p} = -\delta W$$

L'énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur est :

$$\mathcal{E}_\mathrm{p} = qV + K$$

La constante K est nulle, s'il n'y a pas de charges à l'infini.

II- DISTRIBUTIONS DE CHARGES

1- Distribution discrète

Pour N charges ponctuelles q_i, on montre facilement que l'énergie potentielle s'écrit

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} q_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} q_i\, V(M_i)$$

$V(M_i)$ est le potentiel au point M_i.

2- Distribution continue

Lorsqu'il s'agit de distributions continues de charges, la contribution de *dq* est :

$$d\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} dq\, V(M)$$

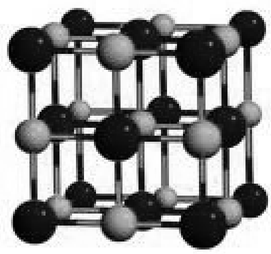
Pour une charge finie répartie de façon continue :

$$E_p = \frac{1}{2}\int_C \lambda V\, dl \qquad \text{pour une distribution linéique}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\iint_S \sigma V\, dS \qquad \text{pour une distribution surfacique}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_D \rho V\, d\tau \qquad \text{pour une distribution volumique}$$

C'est cette énergie qui peut nous expliquer la cohésion du cristal NaCl, constitué d'un enchainement régulier de charges positives et négatives.



III- Localisation de l'énergie électrostatique

Prenons le cas d'une distribution volumique de charges dont l'étendue est finie, et étendons l'intégration à tout l'espace :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \oiint_{S} V\, \vec{E} \,.\, d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{espace} E^2 \, d\tau$$

Or la première intégrale est nulle car le potentiel est nul à l'infini. On a donc :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{espace} E^2 \, d\tau$$

D'où la densité d'énergie stockée dans l'espace :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{p}}}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

DIPOLE ELECTROSTATIQUE

I- DEFINITIONS

1- Moment dipolaire

Un dipôle électrostatique est un système de deux charges $(-q,+q)$ séparées par une distance *d.* On caractérise le dipôle par son moment dipolaire, celui-ci est donné par :

$$\vec{p} = qd\,\vec{e}_x$$

Où $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire orienté de la charge – vers la charge +.

2- Dipôle permanent

Existence en l'absence d'un champ extérieur. Molécule avec un dipôle invariable.

3- Dipôle induit

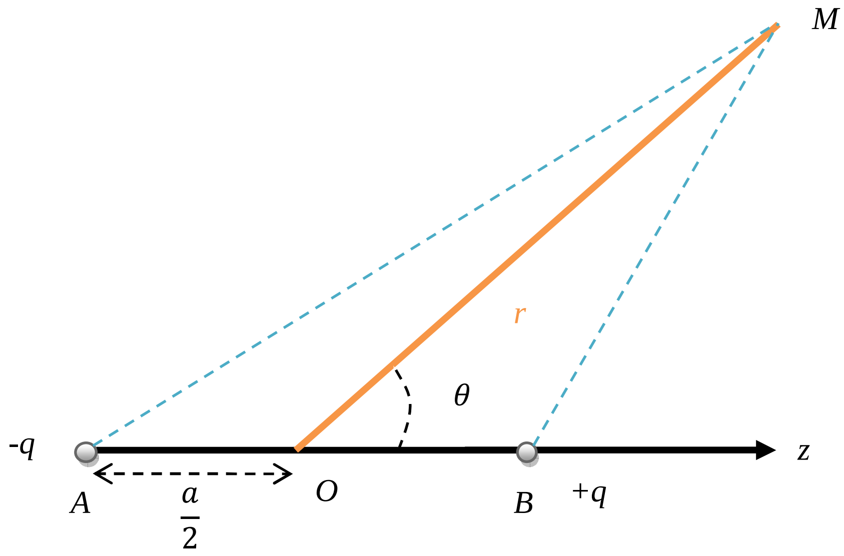
Le moment dipolaire est nul. Mais un champ électrique polarise l'atome ou la molécule.

Exemple : L'atome d'hydrogène. On dit que l'atome est polarisable. Son moment dipolaire s'exprime selon :

$$\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\overrightarrow{E'}$$

où α est la polarisabilité de l'atome, qui s'exprime en m^3.

II- POTENTIEL CREE PAR UN DIPOLE A LONGUE DISTANCE



Il y a invariance autour de l'axe Oz.

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM}\right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

On fait un développement limité au 1er ordre en $\frac{a}{r}$:

$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Ce potentiel décroît donc plus vite que celui créé par une charge ponctuelle.

III- CHAMP ELECTROSTATIQUE CORRESPONDANT

$$\vec{E} = E_r\overrightarrow{e_r} + E_\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Ou encore, en partant directement de la relation vectorielle entre le champ et le potentiel :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

IV- LIGNES DE CHAMP ET SURFACES EQUIPOTENTIELLES

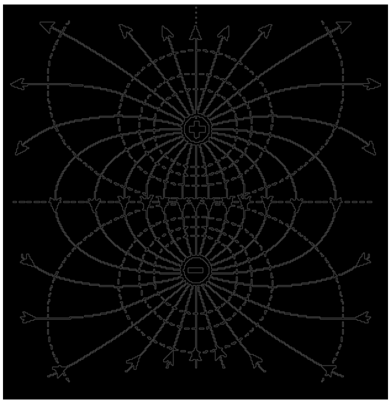
En coordonnées polaires, rappelons l'équation des lignes de champ :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta}$$

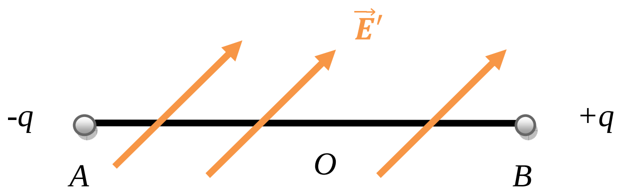
L'intégration conduit à la famille de courbes :

$$r = r_O \sin^2\theta \quad , \quad r_O = constante > 0$$

Surfaces équipotentielles et lignes de champ



V- DIPOLE DANS UN CHAMP EXTERIEUR



La force exercée sur le dipôle est :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = q\left(-\vec{E}'(A) + \vec{E}'(B)\right)$$

Si le champ est uniforme, cette résultante est nulle.

1- Moment des forces sur un dipôle placé dans un champ

Calculons le moment par rapport à *O* :

$$\vec{M}_E = \overrightarrow{OA} \wedge \left(-q\vec{E}'(A)\right) + \overrightarrow{OB} \wedge \left(q\vec{E}'(B)\right)$$

En écrivant pour un champ extérieur non uniforme et pour A et B très voisins,

$$\vec{E}'(A) = \vec{E}'(O) - \frac{\overrightarrow{dE'}}{2} \quad \text{et} \quad \vec{E}'(B) = \vec{E}'(O) + \frac{\overrightarrow{dE'}}{2}$$

On obtient l'expression :

$$\vec{M}_E = \vec{p} \wedge \vec{E}'(O)$$

Pour un champ extérieur uniforme, le dipôle est soumis à un couple :

$$\vec{M}_E \neq 0 \quad \text{et} \quad \vec{F} = 0$$

2- Energie d'un dipôle placé dans un champ extérieur

Soit *V'* le potentiel dont dérive le champ électrostatique extérieur. L'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ électrostatique s'écrit pour les 2 charges composant le dipôle :

$$\mathcal{E} = qV'(A) - qV'(B)$$

Ce qui conduit à :

$$\mathcal{E} = -\vec{p}.\vec{E}'$$

Positions d'équilibre : $\vec{p}$ et $\vec{E}'$ ont la même direction.

VI- CARACTERISTIQUES D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

<u>Somme des charges non nulle : *q*</u>

Distribution du type unipolaire, équivalente à une charge *q* placée au barycentre *G*.

<u>Somme des charges nulle :</u>

1- Barycentre des charges positives distinct du barycentre des charges négatives : distribution du type dipolaire : $\vec{p} = q\overrightarrow{G_-G_+}$.

2- Barycentre des charges positives confondu avec le barycentre des charges négatives : distribution du type quadripolaire : il faut pousser le développement à l'ordre supérieur, par rapport au cas précédent. La distribution n'a pas de moment dipolaire.

CONDUCTEURS ELECTRIQUES – CONDENSATEURS

I- INTRODUCTION

On peut dire que la liaison métallique, celle-ci même qui assure la cohésion du solide, implique des électrons libres qui distinguent les conducteurs des isolants.
Dans les isolants, les électrons des couches externes des atomes forment des liaisons covalentes ou ioniques. Les électrons sont liés et s'écartent très peu de « leurs » atomes.
Dans les conducteurs, en revanche, une partie des électrons est libre de se déplacer et assure la cohésion du solide. Les atomes ayant libéré des électrons, le conducteur peut être considéré comme un réseau de charges positives dans un bain d'électrons libres.

Bien que le conducteur présente des charges libres, il est électriquement neutre.

On peut le charger mais, comme on le verra, ces charges à l'équilibre se mettent à la surface. Les charges libres impliquent des propriétés électriques et optiques intéressantes.

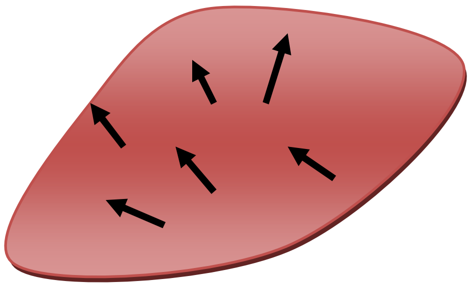
II- CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

1- Définition

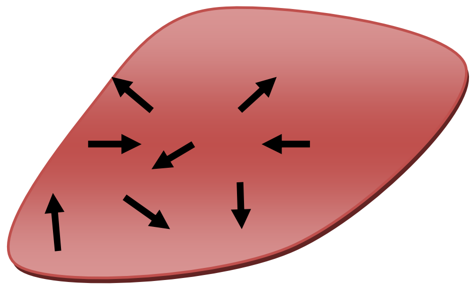
Un conducteur est dit en équilibre électrostatique, s'il n'est le siège d'aucun mouvement d'ensemble de charges.

C'est quoi un mouvement d'ensemble ?

C'est un mouvement dirigé de l'ensemble des charges. A ne pas confondre avec le mouvement aléatoire des électrons libre en agitation thermique, mouvement qui existe toujours à température finie, mais qui n'implique pas de courants électriques.



Vitesses des électrons dans un mouvement d'ensemble



Vitesses des électrons en agitation thermique

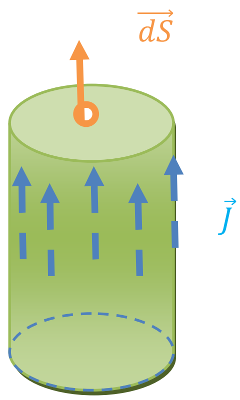
Avec un mouvement d'ensemble, on a un courant. Ce courant a une densité qui s'écrit :

$$\vec{J} = \rho \vec{V}$$

où ρ et $\vec{V}$ sont respectivement la densité de charge et la vitesse (statistique) des électrons.

Le courant électrique a une intensité donnée par le flux de la densité de courant :

$$I = \iint_S \vec{J} \, . \overrightarrow{dS}$$



La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{J} = \gamma \, \vec{E}$$

Où γ est la conductivité du matériau conducteur.

Un conducteur en équilibre électrostatique doit avoir $\vec{J} = 0$.

2- Propriétés d'un conducteur chargé

$$\vec{J} = 0 \text{ implique } \vec{E} = 0$$

Avec

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On a :

$$\rho = 0$$

Le conducteur ne peut donc contenir des charges en volume. Etant chargé, le conducteur porte des charges en surface avec une densité σ. En fait, si l'on introduit des charges dans le conducteur, celles-ci migrent vers la surface.

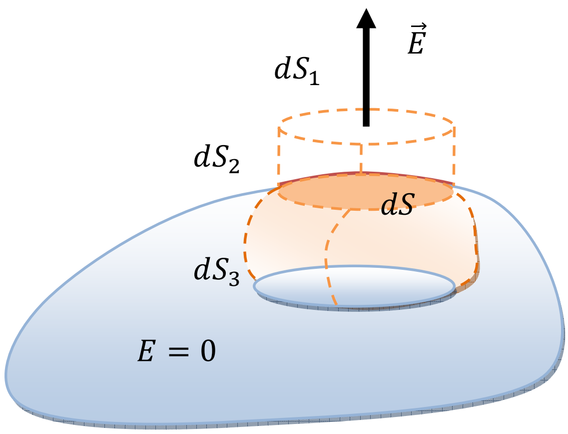
Par ailleurs, $\vec{E} = 0$ implique un potentiel constant.

Résumons : Dans le conducteur

$$\vec{E} = 0$$
$$\rho = 0$$
$$V = cte$$

3- Champ au voisinage d'un conducteur : théorème de Coulomb

Prenons une petite surface fermée dont une partie est plongée dans un conducteur en équilibre électrostatique, et appliquons le théorème de Gauss.



$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3$$

$$d\Phi_2 = 0$$

$$d\Phi_3 = 0$$

$$d\Phi_1 = \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} = E\ dS_1 = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

Dans cette équation, les 2 surfaces élémentaires sont identiques. On a donc en tout point M proche de la surface :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}(M)$$

$\vec{n}(M)$ est le vecteur unitaire collinaire à $\overrightarrow{dS}$, en *M*.

Cette équation avec ses hypothèses, donnant le champ électrostatique au voisinage d'un conducteur chargé, constitue le théorème de Coulomb.

III- REPARTITION DES CHARGES SUR UN CONDUCTEUR

Prenons d'abords une sphère conductrice de rayon *R*. La charge que porte ce conducteur se répartit de façon uniforme.

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

A l'extérieur, à une distance *r* du centre de la sphère, le champ électrostatique est :

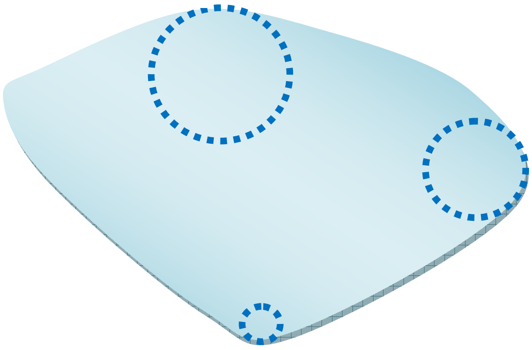
$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

A l'intérieur, le champ est nul.

Au voisinage du conducteur, on retrouve le théorème de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Prenons maintenant un conducteur quelconque.



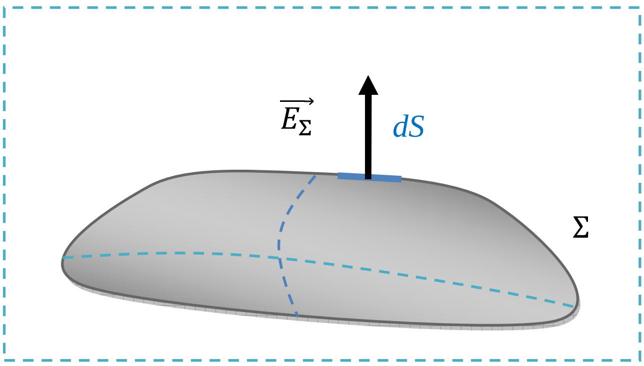
La densité de charge décroît avec le rayon de courbure. On a donc :

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \text{ et } E_1 < E_2 < E_3. \text{ Mais } \quad V = constante.$$

Cette concentration des charges aux faibles rayons de courbures représente l'effet de pointe. Le champ électrique est plus important là où le rayon de courbure est faible.

IV- PRESSION ELECTROSTATIQUE

Soit un conducteur quelconque chargé en équilibre électrostatique.



La surface du conducteur est S. C'est la somme de *dS* et de Σ.
Vu d'un point très proche de *dS*, cet élément *dS* apparaît comme un plan créant alors :

$$\overrightarrow{E_{dS}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Le champ créé par toute la surface S est :

$$\overrightarrow{E_S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

Le champ créé par Σ est donc :

$$\overrightarrow{E_\Sigma} = \overrightarrow{E_S} - \overrightarrow{E_{dS}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

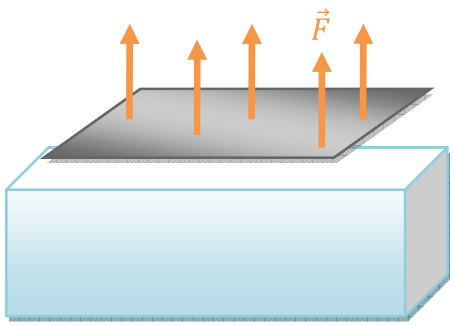
Les charges de Σ exercent donc une force sur les charges de dS, qui vaut :

$$F = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma dS$$

D'où l'expression de la pression électrostatique :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2(M)}{2\varepsilon_0}$$

Cette pression se manifeste si on pose une feuille métallique sur un matériau conducteur chargé. La force soulève la feuille.



V- CAPACITE D'UN CONDUCTEUR

Si on fait passer le conducteur d'un état de charge à un autre, avec entre l'ancien état, charge et potentiel, et le nouveau :

$$\sigma' = k\sigma$$

On a :

$$Q' = \iint_S k\sigma \, dS = kQ$$

$$V' = \iint_S \frac{k\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r} = kV$$

On voit que la charge et le potentiel sont proportionnels. Il existe donc un rapport constant entre la charge et le potentiel, qui permet d'introduire une propriété du conducteur appelée capacité. La capacité du conducteur est :

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \text{en } \textit{Farads}$$

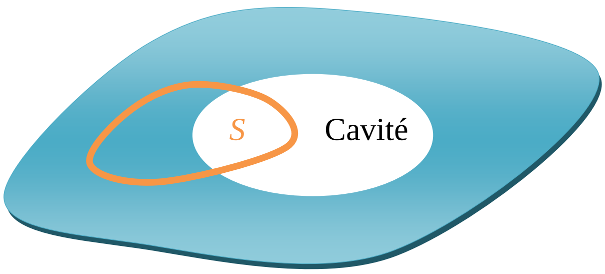
On peut voir facilement que pour un conducteur sphérique, on a :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Elle ne dépend que de la géométrie du conducteur.

VI- PROPRIETES DES CONDUCTEURS AYANT UNE CAVITE

Les charges se mettent-elles sur la paroi interne ?



Supposons que le volume de la cavité ne contient aucune charge.
Tenant compte du fait que le conducteur est équipotentiel et que le potentiel ne peut pas présenter d'extremum dans la cavité, il ne peut y être que constant. Cela implique que le champ électrostatique est nul dans la cavité.

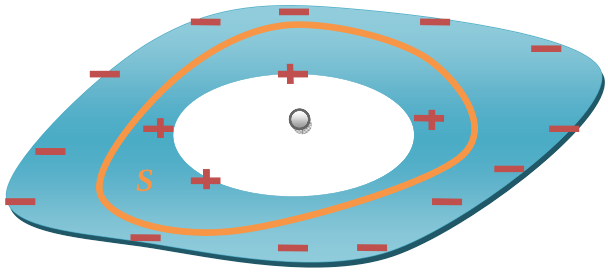
Appliquons maintenant le théorème de Gauss pour la surface S indiquée sur la figure.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La surface interne du conducteur ne porte donc aucune charge. Si le conducteur est chargé, les charges sont sur la surface externe.

$$\begin{aligned} &\vec{E} = 0 \\ &\sigma = 0, \quad \text{sur la paroi de la cavité} \\ &V = cte \end{aligned}$$

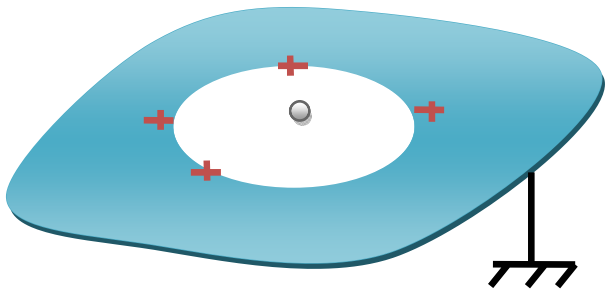
Mettons une charge q négative dans la cavité.



$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q + q'}{\varepsilon_0}$$

Cela montre que la surface interne porte une charge q' positive. Nécessairement la surface externe porte une charge $-q'$.

Relions le conducteur à la terre.

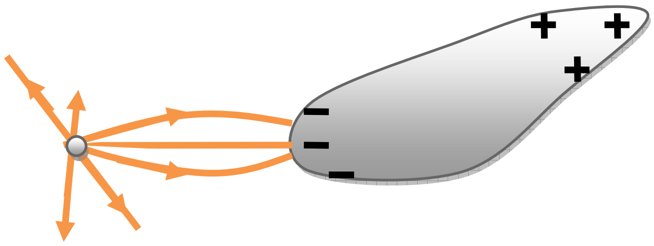


Les charges externes disparaissent, sans influence sur la cavité. L'extérieur n'a pas d'effet sur ce qui se passe dans la cavité. C'est l'idée de base de la Cage de Faraday.

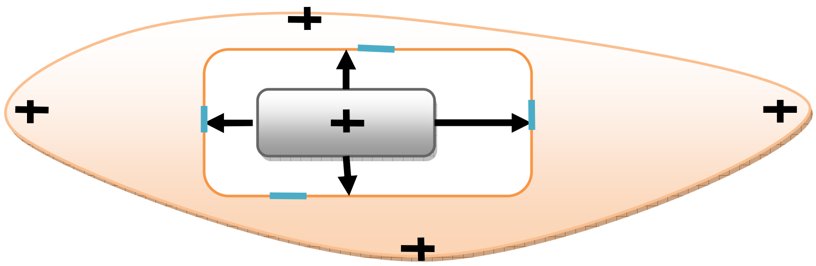
VII- SYSTEME DE CONDUCTEURS

1- Phénomène d'influence

Approchons une charge positive d'un conducteur neutre. Cette charge crée un champ qui modifie la répartition des charges dans le conducteur. Celui-ci devient chargé par influence. Cette influence n'est que partielle. Les lignes de champ ne sont pas toutes reliées au conducteur.

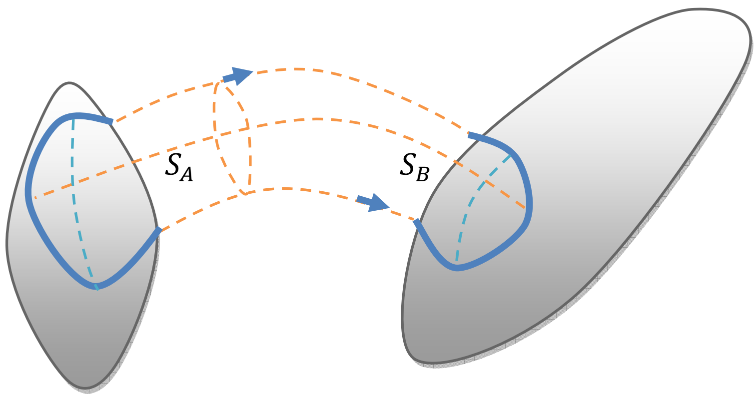


Si on met la charge dans la cavité d'un conducteur, là l'influence est totale. Les deux conducteurs suivants sont en influence totale. Initialement le conducteur externe est neutre et le conducteur interne chargé positivement.



2- Théorème des éléments correspondants

Soit 2 conducteurs en influence.



Les surfaces S_A et S_B du tube de champ sont appelées éléments correspondants. Appliquons le théorème de Gauss à la surface qui se ferme à l'intérieur des conducteurs.

$\Phi = 0$, soit $q_A = -q_B$, pour les charges portées respectivement par les surfaces S_A et S_B.

Le théorème des éléments correspondants dit que les charges portées par ces éléments sont opposées.

3- Coefficients de capacité et d'influence

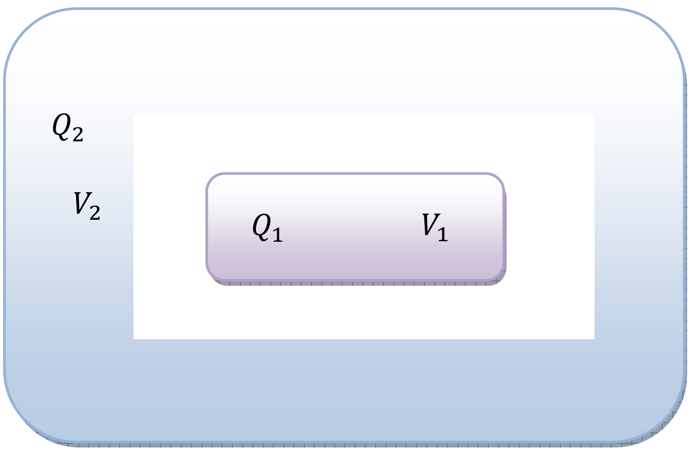
Soit un ensemble de n conducteurs en équilibre électrostatique dans l'espace.
Chacun porte une charge et se trouve à un potentiel. On a :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots + C_{1n}V_n \\
Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ldots + C_{2n}V_n \\
&. \\
&. \\
Q_n &= C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \ldots + C_{nn}V_n
\end{aligned}$$

Les C_{ii} sont des coefficients de capacité pour les conducteurs correspondant et les $C_{\substack{ij \\ i\neq j}}$ sont les coefficients d'influence entre le ième et le jème conducteur : $C_{ij} = C_{ji}$.

VIII- CONDENSATEURS

Il s'agit de deux conducteurs en influence totale. L'un constitue l'armature interne et l'autre l'armature externe.



L'armature interne porte la charge Q_1 et se trouve au potentiel V_1. L'armature externe est au potentiel V_2 et porte la charge $Q_2 = Q'_2 + Q''_2$. Q'_2 est répartie sur la surface interne et Q''_2 sur la surface externe.

On a les relations :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Il existe une relation entre les coefficients que nous allons établir.

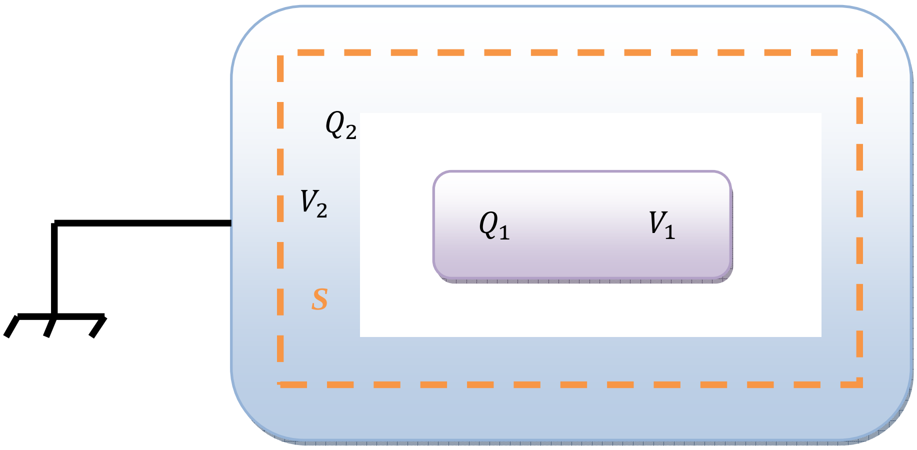
Soit l'expérience suivante : $V_2 = 0$.

Ce qui se traduit par :

$$Q_1 = C_{11}V_1$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 = Q'_2$$

Appliquons le théorème de Gauss en prenant la surface S indiquée sur la figure.



On a :

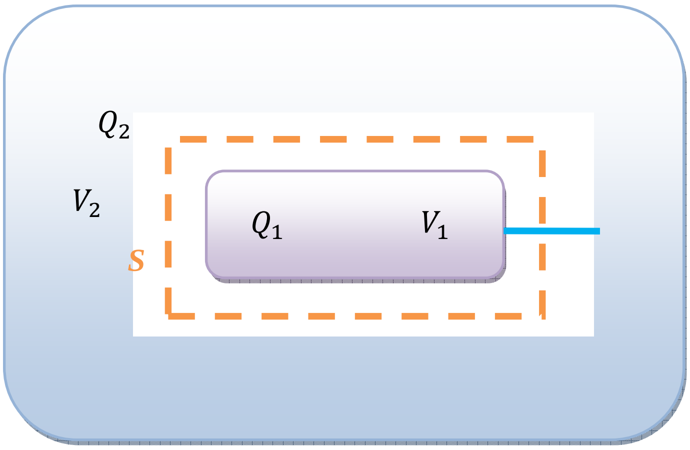
$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

Ce qui implique :

$$C_{21} = -C_{11}$$

Considérons maintenant l'expérience $V_1 = V_2$

Cela consiste simplement à relier les 2 conducteurs.



$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

Ce qui implique :

$$C_{12} = -C_{11}$$

$$Q_2 = (C_{21} + C_{22})\, V_1$$

Le système constitue électriquement un seul conducteur de capacité :

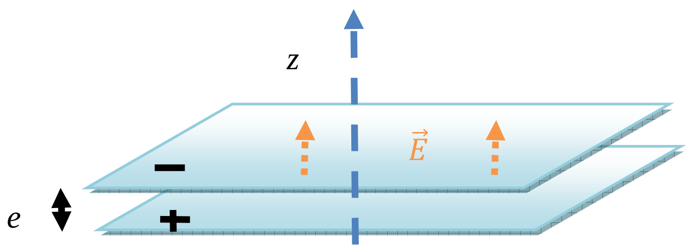
$$C^{'} = C_{21} + C_{22}$$

Résumons, en tenant compte des relations entre les coefficients :

$$Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2)$$

$$Q_2 = -Q_1 + C'V_2$$

1- Condensateur plan



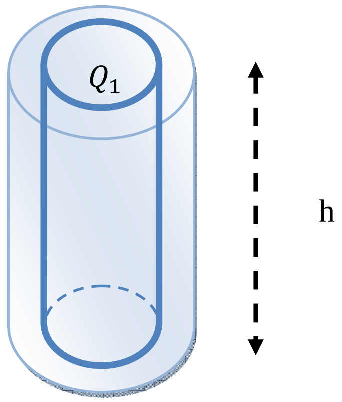
Le champ entre les 2 plaques est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}$.
On peut donc déterminer le potentiel électrostatique et en déduire la tension entre les armatures.

D'où la capacité :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

2- Condensateur cylindrique de hauteur *h* très grande par rapport aux rayons

Il s'agit de 2 conducteurs de forme cylindrique concentrique, entre lesquels il y a le vide. Les rayons respectifs des cylindres intérieur et extérieur sont : R_1 et R_2



Avec la même procédure, on trouve :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

3- Condensateur sphérique

On trouve :

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

4- Association de Condensateurs

En série, on trouve :

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

En parallèle, on trouve :

$$C = \sum_i C_i$$

5- Energie

- Rappel

L'énergie potentielle d'un conducteur portant une charge q au potentiel V :

$$E_p = \frac{qV}{2}$$

L'énergie répartie dans l'espace où règne un champ $\vec{E}$:

$$E_p = \iiint_{espace} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) d\tau$$

$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ est la densité d'énergie électrostatique.

- Energie d'un condensateur

L'énergie électrostatique des 2 conducteurs est :

$$E_p = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 + \frac{1}{2}C'V_2{}^2$$

On voit d'après cette expression que l'on ne récupère qu'une partie de cette énergie lorsque l'on relie les 2 armatures. L'énergie récupérable d'un condensateur est donc :

$$E_p = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2$$

DIELECTRIQUES

I- LES ISOLANTS

Dans les isolants, les électrons des couches externes des atomes forment des liaisons, soit covalentes, soit ioniques. Dans ces liaisons, l'électron ne s'éloigne jamais de l'atome dont il est issu, tout au plus s'en écarte-t-il pour atteindre les atomes premiers voisins. Les électrons sont donc localisés dans une région très restreinte de l'espace. Il n'y a pas d'électrons mobiles.

II- POLARISATION

1- Définition

C'est la densité de moment dipolaire :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \quad P \text{ en } C.m^{-2}$$

Il faut distinguer les diélectriques polaires des non polaires.

2- Origines de la polarisation

Electronique :

$$\vec{P} = N\varepsilon_0\alpha_é\vec{E}_{loc}$$

Ionique :

$$\vec{P} = N\varepsilon_0\alpha_i\vec{E}_{loc}$$

Où $\vec{E}_{loc}$ est le champ électrique local.

III- POTENTIEL CREE PAR DES CHARGES DE POLARISATION

On part de l'expression du potentiel créé par un dipôle élémentaire. On trouve :

$$V_{Pol}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint\!\!\oint_S \frac{\vec{P}.\vec{n}}{PM}dS + \iiint_D \frac{-\vec{\nabla}.\vec{P}}{PM}d\tau\right]$$

Par analogie, on détermine des charges de polarisation dont les densités sont :

$$\sigma_{pol} = \vec{P}.\vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_{pol} = -\left(\vec{\nabla}.\vec{P}\right).$$

Il s'agit de charges fictives.

IV- CHAMP ELECTROSTATIQUE

Il suffit d'écrire le champ créé par les distributions que l'on vient de définir :

$$\vec{E}_{Pol}\left(M\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oiint_S \frac{\sigma_{pol}\overrightarrow{PM}}{PM^3}dS+\iiint_D \frac{\rho_{pol}\overrightarrow{PM}}{PM^3}\,d\tau\right]$$

V- INDUCTION

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

Equation de Gauss locale :

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho_{libre}$$

Permittivité et susceptibilité électriques d'un diélectrique :

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}\ \vec{D}=\varepsilon_0\left(1+\chi_e\right)\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$$

BIBLIOGRAPHIE

Livres

Electrostatique. E. Durand. Masson.

Champs et ondes électromagnétiques. P. Lorrain et D.R. Corson. A. Colin.

Electromagnétisme : fondements et applications. J. P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger. Masson.

Liens

BOSTON UNIVERSITY : http://physics.bu.edu/py106/Notes.html

UNIVERSITE DE GRENOBLE : http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~ferreira/teaching.html#L1