ELECTROMAGNETISME II

Saïd KOUTANI

SOMMAIRE

CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

$$\text{Couplage } (espace,\ temps) \quad \rightarrow \quad \text{Champ électromagnétique } \left(\vec{E}, \vec{B}\right)$$

I- EQUATIONS DE MAXWELL

Les équations de Maxwell donnent la structure du champ électromagnétique dans l'espace-temps. Fondamentalement, elles sont invariantes par le Groupe de Lorentz. Ce qui n'est pas le cas entre 2 référentiels galiléens. On peut donc dire que ces équations « contiennent » la relativité restreinte d'Einstein-Lorentz-Poincaré, si l'on considère la vitesse de la lumière constante..

1- Le courant de déplacement

Rappelons l'équation de continuité ou de conservation de la charge :

$$\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'équation locale du théorème de Gauss implique :

$$\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}.\left[\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = 0$$

$\left|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|$ doit donc avoir la dimension d'une densité de courant $\left|\vec{J}\right|$. $\vec{J}$ est la densité de courant de volume. Le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ représente donc une densité de courant, il est appelé densité de courant de déplacement. Toutefois, il ne correspond pas à un courant réel. Seulement, son existence implique l'existence d'un champ magnétique qui n'est pas créé par la densité de courant de volume. Autrement dit, $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est bien une source du champ magnétique et va jouer un rôle fondamental dans l'aspect Propagation du champ électromagnétique.

Ce qui nous amène donc à corriger le théorème d'Ampère de la Magnétostatique :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Il importe de noter que la symétrie (l'antisymétrie) du champ magnétique dépend aussi de la symétrie de cette nouvelle source.

2- Equations de Maxwell locales

On a donc les 4 équations locales fondamentales de l'électromagnétisme :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'essentiel est que la variation des champs (effet) dans le temps devient elle-même source (cause) de champ. Le nouvel espace qui est l'espace-temps introduit cette transformation conceptuelle, contrairement à l'Electrostatique et à la Magnétostatique où seuls les charges et les courants réels considérés dans l'espace tridimensionnel, sont respectivement et séparément sources du champ électrique et du champ magnétique.

3- Equations intégrales

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S} \qquad\qquad \oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \left[I + I_d \right]$$

I_d est le courant de déplacement.

II- CONTINUITE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Lors du passage d'un milieu 1 à un milieu 2, le champ électrique et le champ magnétique ne sont pas continus en général. En fait, il faut considérer leurs composantes tangentielles et leurs composantes normales à la surface de séparation des 2 milieux.
Nous considérerons les 2 milieux homogènes, linéaires et isotropes.

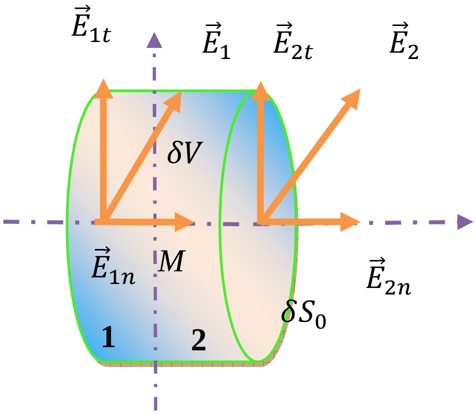
Soit $\left(\vec{E}_1, \vec{B}_1\right)$ le champ électromagnétique dans le milieu 1 et $\left(\vec{E}_2, \vec{B}_2\right)$ dans le milieu 2.
On a :

$$\vec{E}_1 = E_{1n}\vec{e}_n + E_{1t}\vec{e}_t \quad , \quad \vec{B}_1 = B_{1n}\vec{e}_n + B_{1t}\vec{e}_t$$
$$\vec{E}_2 = E_{2n}\vec{e}_n + E_{2t}\vec{e}_t \quad , \quad \vec{B}_2 = B_{2n}\vec{e}_n + B_{2t}\vec{e}_t$$

$\vec{e}_n$ est le vecteur unitaire normal à la surface de séparation au point M considéré.
$\vec{e}_t$ est le vecteur unitaire tangent à la surface de séparation au même point M.

1- Champ électrique

Soit δV un petit volume centré sur le point M appartenant à la surface de séparation des milieux 1 et 2. Appliquons le théorème de Gauss sur la surface δS englobant le volume δV .



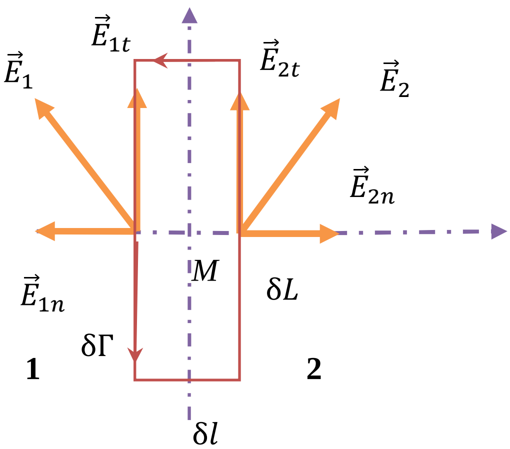
La hauteur du cylindre est considérée comme infiniment petite par rapport rayon de la section δS_0.

$$\oiint_{\delta S} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = (E_{2n} - E_{1n})\delta S_0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \delta S_0}{\varepsilon_0}$$

Ce qui montre que la composante normale de $\vec{E}$ est discontinue si la surface de séparation qu'elle traverse présente une densité de charge surfacique. Comme exemple, le milieu 1 peut être le vide et le milieu 2 un conducteur chargé.

$$(E_{2n} - E_{1n}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Considérons maintenant une petite surface δS , de contour $\delta\Gamma$, dont la largeur δl est infiniment petite par rapport à la petite longueur δL.



La circulation du champ électrique sur ce parcours s'écrit :

$$\oint_{\delta\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = \iint_{\delta S} (\vec{\nabla}\wedge\vec{E}).\vec{dS} = (E_{2t} - E_{1t})\delta L = -\iint_{\delta S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{dS} = -\frac{d}{dt}\iint_{dS} \vec{B}.\vec{dS}$$

Or, étant donné que δS est un infiniment petit du second ordre par rapport à δL le flux de $\vec{B}$ est négligeable par rapport à la circulation de $\vec{E}$. La composante tangentielle est donc toujours continue.

$$(E_{2t} - E_{1t}) = 0$$

2- Induction électrique

Rappelons que :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

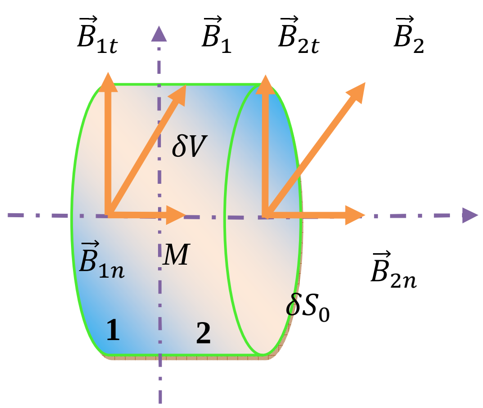
Avec le même raisonnement que précédemment, on montre que :

$$(D_{2n} - D_{1n}) = \sigma_{libre}$$

où σ_{libre} correspond aux charges libres, c'est-à-dire que dans cette densité les charges de polarisation n'interviennent pas.

3- Champ magnétique

Nous allons calculer le flux à travers une surface cylindrique dont la hauteur est très faible comparée au rayon. Soit donc un petit cylindre, de volume δV contenu dans la surface fermée δS, centré sur la surface de séparation entre 2 milieux **1** et **2**. δS_0 est la section droite du petit cylindre dont la hauteur tend vers 0.

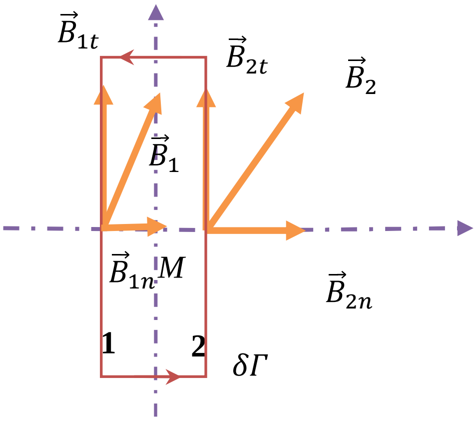


$$\iiint_{\delta V} \vec{\nabla}.\vec{B}\, d\tau = 0 = \oiint_{\delta S} \vec{B}.\overrightarrow{dS} = (B_{2n} - B_{1n})\delta S_0$$

On a donc pour la composante normale du champ magnétique :

$$(B_{2n} - B_{1n}) = 0$$

On va maintenant appliquer le théorème d'Ampère pour le contour $\delta\Gamma$ de la surfrace δS de longueur δL et de largeur δl. C'est un petit contour centré sur un point *M* de la surface de séparation des 2 milieux 1 et 2.



On a :

$$\oint_{\delta\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = (B_{2t} - B_{1t})\delta L = \mu_0(\text{Intensités de courants})$$

La contribution des courants de volume et de déplacement, donnés ci-après, est négligeable, car δS est du second ordre par rapport à δL.

$$I = \iint_{\delta S} \vec{J}.\overrightarrow{dS} \quad \text{et} \quad I_D = \iint_{\delta S} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$$

Il subsiste alors des courants de surface. On a par conséquent :

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0\left(I_{1S} + I_{2S}\right)$$

En conclusion, le champ magnétique a une composante normale continue et une composante tangentielle discontinue en présence des courants de surface.

III- POTENTIELS

1- Potentiel vecteur et potentiel scalaire

L'équation $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ implique qu'il existe une fonction vectorielle $\vec{A}$ telle que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$\vec{A}$ est le potentiel vecteur.

Par ailleurs, nous avons $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ce qui peut s'écrire :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Ou encore

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

On a un rotationnel nul. Il existe donc une fonction scalaire V telle que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \,, \quad \text{ce qui implique} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On reconnaît le terme $-\vec{\nabla} V$ de l'Electrostatique. Le terme $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ correspond aussi à un champ électrique, c'est bien le champ électromoteur induit.

Les potentiels ne sont définis qu'à des fonctions près.
A titre d'exemple, vérifions que pour les potentiels suivants, on obtient le même champ électromagnétique :

$$\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad \text{et } V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \mathrm{V}' - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}'}{\partial \mathrm{t}} = -\vec{\nabla} \mathrm{V} \quad + \vec{\nabla} \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \vec{\nabla} \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}} = \vec{\mathrm{E}}$$
$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}' = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad = \vec{B}$$

2- Jauge de Lorentz

Nous allons relier les 2 potentiels aux distributions de charge et de courant. Pour cela, il suffit d'injecter les expressions des champs électrique et magnétique dans des équations de Maxwell :

$$-\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}V\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\ \ \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)=\mu_0\vec{J}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}V+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Delta V+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\ \ \Delta\vec{A}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)=-\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}V+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

Ce que l'on peut mettre sous la forme :

$$\Delta V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad \text{et}\quad \Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)=-\mu_0\vec{J}$$

On a posé $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Le potentiel vecteur est défini à un gradient près et le potentiel scalaire à une fonction du temps près. On peut introduire une jauge qui rendra les équations ci-dessus plus simples :

$$\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

C'est la jauge de Lorentz.

En régime stationnaire, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial t}\equiv 0$, on retrouve la jauge de Coulomb de la Magnétostatique : $\vec{\nabla}.\vec{A}=0$.

Finalement, on a :

$$\Delta V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad \text{et}\quad \Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$$

c correspond à la célérité de la lumière dans le vide :

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3.10^8\ m.s^{-1}$$

Cette expression simple représente « une grande unification » :

Electricité + Magnétisme +Optique.

Le potentiel vecteur et le potentiel scalaire se propagent dans l'espace à la vitesse finie *c*.

IV- Régime quasi-stationnaire

Ce qui se passe en *P* se propage vers *M* au bout d'un temps fini $\tau=\frac{PM}{c}$. Si *T* est le temps caractéristique du signal électromagnétique (sa période par exemple), on a les deux situations :

1- $\frac{\tau}{T} \ll 1$: tout se passe comme si la propagation s'effectue de façon instantanée.
2- $\frac{\tau}{T} \gg 1$: le temps de propagation est important. Les phénomènes liés à la propagation dominent.

Le 1[er] régime correspond à une situation où la propagation est négligeable. Cela revient en fait à négliger la densité de courant de déplacement devant la densité de courant J :

$\|\vec{J}\| / \|\varepsilon_0 (\partial \vec{E})/\partial t\| \gg 1$

L'équation locale du théorème d'Ampère redevient simple :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} \approx \mu_0 \vec{J}$$

Là, on ne tient pas compte de la propagation, mais des phénomènes d'induction. Le champ électromoteur induit est $\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Cela explique l'importance du terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans les phénomènes de propagation.

ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

I- EQUATIONS DANS LE VIDE

C'est le cas académique le plus simple. Il s'agit d'un espace vide illimité : l'absence de conditions aux limites correspond à une propagation dite libre.
Avec,

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{J} = 0$$

les équations de Maxwell deviennent :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En prenant le rotationnel de l'équation de Faraday et en tenant compte de l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient une équation en $\vec{E}$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Une combinaison analogue conduit à une équation en $\vec{B}$:

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Il s'agit d'une équation de propagation pour le champ électrique et le champ magnétique.

Si l'on introduit l'opérateur dalembertien :

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

les équations du champ électromagnétique s'écrivent simplement :

$$\square \vec{E} = 0$$
$$\square \vec{B} = 0$$

I- SOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION

1- Solution en ondes planes

L'onde ne dépend que d'une direction *u*.

a- Transversalité de l'onde

$$\vec{e}_u = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$u = \vec{e}_u \cdot \vec{r} \text{, par conséquent } \vec{\nabla} \equiv \vec{e}_u \cdot \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{et} \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_u}{\partial u} = 0$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\partial B_u}{\partial u} = 0$$

Ce qui implique, ne pouvant tenir compte que des champs variables dans l'espace-temps :

$$E_u = cste = 0$$
$$B_u = cste = 0$$

Le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires à la direction de vecteur unitaire $\vec{e}_u$.

Par ailleurs, nous avons :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$
$$\vec{e}_u \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial u} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_u \cdot \frac{\partial}{\partial u} \text{ ; } \vec{\nabla}\wedge \equiv \vec{e}_u \wedge \frac{\partial}{\partial u}$$

Ce qui factorise aussi l'opérateur dalembertien :

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \vec{E} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial u} \equiv \mp \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{e}_u \wedge \left(\mp \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{e}_u \wedge \frac{1}{c} \vec{E} \mp \vec{B} \right) = 0$$

$$\vec{e}_u \wedge \frac{1}{c} \vec{E} \mp \vec{B} = cste$$

On a par conséquent :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_u \wedge \vec{E}$$

A ce stade, il est facile de voir que les trois vecteurs $\left(\vec{e}_u, \vec{E}, \vec{B} \right)$ forment un trièdre direct. Remarquons de plus que dans un plan d'onde (plan orthogonal à la direction de propagation), le champ électromagnétique est uniforme.

b- Solution

Quel que soit le champ, on a une équation du type :

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

Ce que l'on peut factoriser comme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi = 0$$

Si l'on opère le changement de variables suivant,

$$v = \left(t - \frac{u}{c} \right), \qquad w = \left(t + \frac{u}{c} \right)$$

on a les relations entre dérivées partielles :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial v} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \dfrac{\partial u}{\partial w} & \dfrac{\partial t}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond à la transformation :

$$\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{c}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}$$

On voit facilement que l'équation de propagation est équivalente à :

$$\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w}\right)\Phi(v,w) = 0$$

Cette équation a pour solution :

$$\Phi(v,w) = \text{fonction}(v) + \text{fonction}(w)$$

On a donc :

$$\Phi = p^{+}\left(t - \frac{u}{c}\right) + p^{-}\left(t + \frac{u}{c}\right)$$

- **L'onde progressive** p^{+}

Supposons que l'on ait simplement $E = p^{+}\left(t - \frac{u}{c}\right)$. A l'instant t, la valeur du champ E en M est la même que celle qu'il avait en O à l'instant $t - \frac{u}{c}$. On peut dire que ce qui se passe en O à un instant donné, se propage et se retrouve en M après une durée $\frac{u}{c}$.
Ecrivons l'argument de la fonction de telle façon qu'il n'ait pas de dimension physique.

$$\omega\left(t - \frac{u}{c}\right) = \omega t - \omega\frac{u}{c} = \omega t - \omega\frac{\vec{e}_u.\overrightarrow{OM}}{c}$$

ω est naturellement la pulsation de l'onde. On pose $k = \frac{\omega}{c}$. L'argument devient :

$$\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} = \omega t - \vec{k}.\vec{r}$$

Le vecteur $\vec{k}$ est le vecteur de direction pour l'onde. Il est appelé vecteur d'onde et son module $\left\|\vec{k}\right\| = \frac{\omega}{c}$, le nombre d'onde. L'onde progressive se propage selon la direction $\vec{k}$.

A un instant donné, les ensembles continus de points M de l'espace au niveau desquels le champ E prend la même valeur sont les surfaces d'onde. Puisque t est donné, il s'agit des surfaces où le produit scalaire $\vec{k}.\vec{r}$ est constant. La normale à ses surfaces est donnée par $\vec{\nabla}\left(\vec{k}.\vec{r}\right) = \vec{k}$. Les surfaces d'onde sont donc des plans orthogonaux au vecteur d'onde $\vec{k}$.
$\omega t - \vec{k}.\vec{r}$ constitue la phase de l'onde. Cette phase se déplace de proche en proche, de plan en plan. La propagation physique de l'onde est une propagation mathématique de la phase dans l'espace géométrique.

- **L'onde régressive p^-**

On peut dire la même chose ici pour une propagation inverse.
En fait, la solution p^+ suppose une source émettrice en O et la solution p^- un puits d'absorption de l'onde.
Dans un sens, on peut dire que la solution p^+ va vers le futur et la solution p^- va vers le passé. Ici rien ne nous empêche de penser que le phénomène est réversible, pour nous contenter d'étudier simplement la fonction p^+.

c- Solution en ondes sphériques

Pour une onde sphérique, seule la partie radiale est non nulle dans l'expression du laplacien en coordonnées sphériques.
L'équation de propagation s'écrit alors :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \vec{E}}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}=0$$

Laquelle est équivalente à l'expression :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\vec{E}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}=0$$

Ou encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\vec{E}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(r\vec{E}\right)}{\partial t^2}=0$$

Sous cette forme, l'équation peut être factorisée et manipulée comme celle de l'onde plane. On a donc la solution :

$$E=\frac{p^+\left(t-\frac{r}{c}\right)+p^-\left(t+\frac{r}{c}\right)}{r}$$

Les surfaces d'onde sont ici des sphères concentriques. C'est pourquoi l'on parle d'ondes sphériques. Il importe de noter que l'amplitude de l'onde n'est pas constante. Mais cela n'implique pas une perte d'énergie dans l'espace vide **!!**

d- Onde plane monochromatique

Il s'agit de l'onde sinusoïdale, une harmonique. Plus généralement, on peut toujours décomposer une fonction de $\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)$ en harmoniques, à condition qu'elle soit périodique ou de carré sommable (Analyse de Fourier).

Le champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{B}=\vec{B}_0\cos\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)$$

Prenons le cas le plus simple : $\vec{k}=k\vec{e}_z$, c'est-à-dire celui correspondant à une propagation selon *z*.

$$\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)=\left(\omega t-kz\right)=\omega\left(t-\frac{k}{\omega}z\right)$$

On voit facilement qu'on a une double périodicité :

- Une périodicité temporelle correspondant à la pulsation $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$, où *T* et ν sont respectivement la période et la fréquence.
- Une périodicité spatiale correspondant au nombre d'onde $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, où $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ est la longueur d'onde.

Notation complexe :

$$\vec{E}^*=\vec{E}_0e^{i\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)} \quad \text{et} \quad \vec{B}^*=\vec{B}_0e^{i\left(\omega t-\vec{k}.\vec{r}\right)}$$

Les expressions locales s'écrivent et déterminent la structure du champ électromagnétique dans l'espace :

$$\vec{k}\wedge\vec{E}=\omega\vec{B}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{B}=-\frac{\omega}{c^2}\vec{E}$$
$$\vec{k}.\vec{E}=0$$
$$\vec{k}.\vec{B}=0$$

e- Vitesse de phase

On a vu que la phase se propage de proche en proche. La vitesse de phase est la vitesse de cette propagation.

$$d\phi=\omega dt-kdz \qquad \rightarrow \qquad V_\phi=\frac{\omega}{k}$$

Dans le vide sans bords :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = c$$

f- Vitesse de groupe

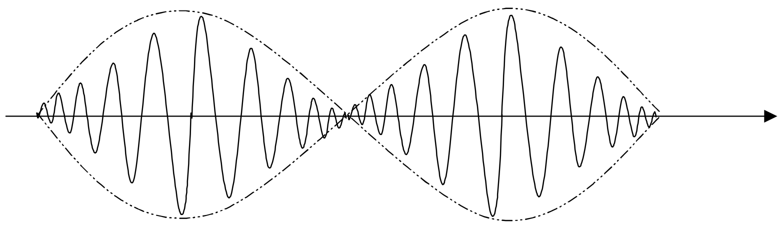
Prenons l'exemple de 2 ondes planes monochromatiques de mêmes amplitudes, avec des pulsations voisines, se propageant selon les *z* croissants. Les champs électriques sont selon $\vec{e}_x$:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \\ \dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} = \omega_0\end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}\Delta k = k_1 - k_2 \\ \dfrac{k_1+k_2}{2} = k_0\end{array}\right.$$

Les ondes superposées donnent un champ total :

$$\vec{E}^* = 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}\vec{e}_x$$

Exemple de champs superposés



C'est une onde plane non monochromatique. L'amplitude se propage à la vitesse $\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} = c$

Pour un continuum de fréquences, la vitesse de groupe est donnée par :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Dans le vide sans bords :

$$V_\phi = V_g = c.$$

II- POLARISATION

C'est la direction du champ électrique $\vec{E}$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i(\omega t - kz + \varphi_x)} \\ E_{0y}e^{i(\omega t - kz + \varphi_y)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \\ 0 \end{bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0^* e^{i(\omega t - kz)}$$

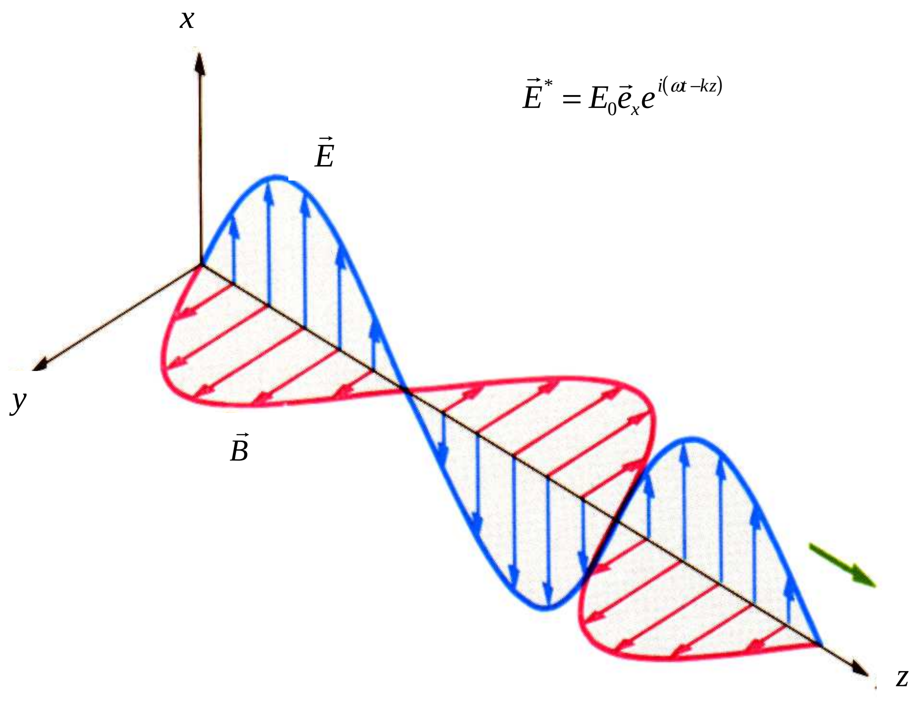
$$\rho = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} = r \cdot e^{i(\varphi)}$$

Dans un repère local $(Mxyz_0)$, φ est le déphasage d'une composante par rapport à l'autre.

1- Polarisation rectiligne

$\vec{E}$ garde la même direction.

$\varphi = 0$ (ou π) ce qui implique $\rho = \pm r = \pm E_{oy} / E_{ox}$



2- Polarisation circulaire

Pour un vecteur d'onde selon $\vec{e}_z$. $\vec{E}$ effectue une rotation dans le plan Oxy

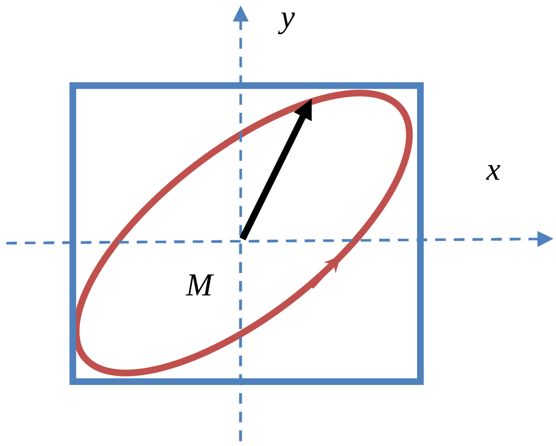
$$\varphi : \text{déphasage de } E_y \text{ par rapport à } E_x \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2} & : \text{circulaire gauche} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} & : \text{circulaire droite} \end{cases}$$

$$\rho = \pm ir = \pm iE_{0y} / E_{0x}$$

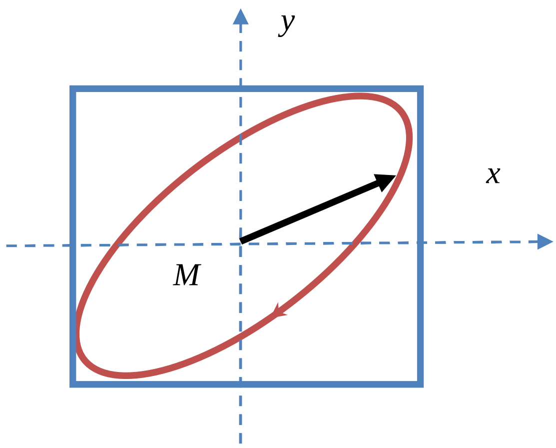
si $E_{0y} = E_{0x} = E_0$, $\vec{E}(z_0, t) = E_0 \left(\cos(\omega t) \vec{e}_x \pm \sin(\omega t) \vec{e}_y \right)$.

3- Polarisation elliptique

C’est le cas général, où le déphasage et les composantes sont quelconques. Là encore, on distingue les 2 sens de rotations.



Gauche



Droite

PUISSANCE ELECTROMAGNETIQUE

I- LES COMPOSANTES ELECTRIQUE ET MAGNETIQUE

Prenons une particule de charge q se déplaçant par rapport à un observateur à la vitesse $\vec{V}$. La particule est en mouvement dans l'espace où règne un champ électromagnétique.

La charge subit la force Lorentz donnée par :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Déterminons la puissance communiquée à la charge.

$$P = P_m + P_e = \vec{V}.\left(q\vec{V} \wedge \vec{B}\right) + \vec{V}.\left(q\vec{E}\right)$$

$$P = P_e = \vec{V}.\left(q\vec{E}\right)$$

Pour une distribution de charge volumique ρ , la contribution d'un élément de charge dq est :

$$dP = \vec{V}.\vec{E}\left(\rho d\tau\right)$$

D'où la densité de puissance :

$$\frac{dP}{d\tau} = \rho\vec{V}.\vec{E} = \vec{J}.\vec{E} \quad \text{en } \left(W.m^{-3}\right)$$

II- EQUATION DE CONSERVATION

La densité de courant est donnée par l'équation de Maxwell-Ampère.

$$\vec{J} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où l'expression de la densité de puissance :

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial\left(\frac{E^2}{2}\right)}{\partial t}$$

Or,

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) - \vec{E}.\left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$-\vec{E}.\vec{J} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right] + \vec{\nabla}.\left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

On pose $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. C'est le vecteur, dit de Poynting, qui représente la puissance rayonnée. Il s'exprime en $(W.m^2)$.

L'on reconnaît par ailleurs les densités d'énergies électrique et magnétique :

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{: densité d'énergie électrique}$$

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{: densité d'énergie magnétique}$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t}[W_e + W_m] + \vec{\nabla}.\vec{\Pi} = -\vec{E}.\vec{J}$$

Sans charges en mouvement, l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}[W_e + W_m] + \vec{\nabla}.\vec{\Pi} = 0$$

Dans le vide on peut montrer facilement que $W_e = W_m$

Pour un domaine de volume *D* délimité par la surface *S*, l'équation intégrale s'écrit dans le cas général :

$$\iiint_D \frac{\partial W}{\partial t} d\tau + \oiint_S \vec{\Pi}.d\vec{S} = -\iiint_D \left(\vec{E}.\vec{J}\right) d\tau,$$

où $W = W_e + W_m$. $\oiint_S \vec{\Pi}.d\vec{S}$ représente la puissance rayonnée à travers la surface S.

ONDES ELECTROMAGNETIQUES ET CONDUCTEURS

I- CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN MILIEU CONDUCTEUR

Le milieu conducteur est considéré homogène, isotrope et linéaire.
On a : $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, où γ est la conductivité du milieu.
On remplace ε_0 et μ_0 par :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

ε_r et ε_r sont respectivement la permittivité électrique relative et la perméabilité magnétique relative du milieu.

Les équations de Maxwell s'écrivent simplement

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu\gamma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1- Densité de charge dans un conducteur

Rappelons d'abord que pour un conducteur en équilibre, les charges ne peuvent être que surfaciques.
Qu'en est-il lorsqu'il s'agit d'un champ électromagnétique, c'est-à-dire dans un couplage espace-temps ?

L'évolution de la densité de charge est gérée par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{J} = -\gamma\vec{\nabla}.\vec{E}$$

Tenant compte de l'équation locale du théorème de Gauss, on obtient une équation différentielle pour $\rho(t)$:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon}\rho(t) = 0$$

Laquelle présente la solution exponentiellement décroissante :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau_r}}, \quad \text{avec } \tau_r = \frac{\varepsilon}{\gamma} .$$

Pour le cuivre $\tau_r \approx 10^{-14} s$. Ce temps est à comparer à l'inverse de la fréquence de l'onde électromagnétique. On voit que pour les fréquences habituelles, ce temps est négligeable. Cela veut dire que les charges électriques « passent leur temps » à la surface du conducteur.
On peut dire que pour les bons conducteurs on a : $\rho \sim 0$.

2- Equations de Maxwell dans un conducteur

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu\gamma\vec{E} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3- Transversalité de l'onde

Considérons une onde plane monochromatique se propageant selon les *z* croissants. Le champ électrique ne dépend pas de *x* et *y*.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

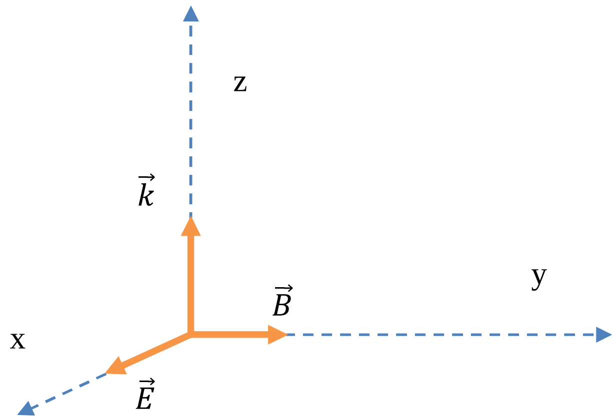
On a donc $\vec{E} \perp \vec{k}$ et $\vec{B} \perp \vec{k}$.

Pour simplifier prenons le champ $\vec{E}$ selon $\vec{e}_x$:

$$\vec{E}^* = E_0\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)}$$

L'équation de Maxwell-Faraday donne pour $\vec{B}$:

$$\vec{B}^* = \frac{k}{\omega} E_0\vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$



4- Equation de propagation dans un conducteur

Les équations de Maxwell combinées donnent :

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

Une forme du type onde plane monochromatique est solution si (équation de dispersion) :

$$k^2 = \mu_r\varepsilon_r k_0^2\left(1 - i\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad k = k_r - ik_i$$

On définit le facteur de qualité par le rapport :

$$Q = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^{-1}$$

L'équation de dispersion s'écrit alors :

$$k^2 = \mu_r\varepsilon_r k_0^2\left(1 - i\frac{1}{Q}\right)$$

On peut vérifier facilement que le facteur de qualité correspond au rapport : $\dfrac{\left\|\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\|}{\left\|\vec{J}\right\|}$.

$$Q = \frac{\left\|\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\|}{\left\|\vec{J}\right\|} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Q << 1 \text{: régime quasi-stationnaire} \rightarrow \text{ Atténuation : pas de propagation} \\ Q >> 1 \text{ : mauvais conducteur dans le spectre considéré : propagation} \end{cases}$$

Revenons maintenant à la comparaison du temps caractéristique et l'inverse de la fréquence $T = \frac{1}{\nu}$.

$$\frac{T}{\tau_r} \gg 1 \text{ correspond à } Q \ll 2\pi$$

On conclue que pour les bons conducteurs dans un spectre de fréquences donné, l'onde plane est fortement atténuée. La propagation n'a lieu que proche de la surface dans une épaisseur dite de peau.

5- Nombre d'onde dans le cas général

A partir de l'équation de dispersion, on a le système :

$$k_r^2 - k_i^2 = \mu_r \varepsilon_r k_0^2 = S$$
$$-k_r^2 k_i^2 = -\left(\frac{\mu_r \varepsilon_r k_0^2 \gamma}{2\varepsilon\omega} \right)^2 = P$$

$k_0 = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde dans le vide. k_r^2 et $-k_i^2$ sont solutions de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0$$

On trouve :

$$k_r = \left(\frac{\mu_r \varepsilon_r}{2} \right)^{\frac{1}{2}} k_0 \left(\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_i = \left(\frac{\mu_r \varepsilon_r}{2} \right)^{\frac{1}{2}} k_0 \left(\left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

6- Onde évanescente

L'amplitude de l'onde décroit.

$$\vec{E} = \left(\vec{E}_0 e^{-k_i z} \right) e^{i(\omega t - k_r z)}$$

On définit l'épaisseur de peau par $\delta = \dfrac{1}{k_i}$. C'est la distance sur laquelle l'amplitude est atténuée d'un facteur $\dfrac{1}{e}$. On estime que la propagation est évanescente et n'a lieu que sur cette distance.

Pour les très bons conducteur, le facteur de qualité est tel que $Q = \dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma} \ll 1$. Ce qui implique :

$$k^2 \simeq \mu_r \varepsilon_r k_0^2 \left(-i\frac{1}{Q}\right) = \mu_r \varepsilon_r k_0^2 \left(\frac{1}{Q}\right) e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit :

$$k \simeq \sqrt{\frac{\mu_r \varepsilon_r}{2Q}} k_0 (1-i)$$

Ou encore :

$$k \simeq K(1-i)$$

avec

$$K = k_0 \sqrt{\frac{\mu_r \varepsilon_r}{2Q}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2}}$$

on voit que dans ce cas, on a $k_r = k_i$ et donc $\delta = \dfrac{1}{K}$.

7- **Densité de puissance :**

Avec $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, on a l'expression complexe suivante pour la densité de courant :

$$\vec{J}^* = E_0 \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\omega}} e^{-Kz} e^{i(\omega t - kz)} e^{-i\frac{\pi}{4}} \vec{e}_y$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \left\langle \vec{E}.\vec{J} \right\rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\frac{z}{\delta}}$$

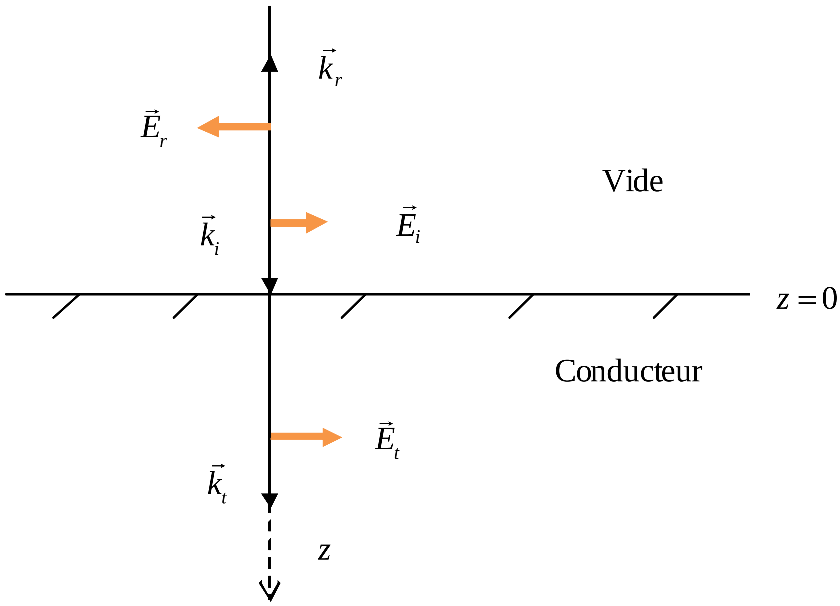
Rappelons que dans le vide on a une égalité entre les densités d'énergies électrique et magnétique. Dans un conducteur cela dépend du facteur de qualité Q. on a :

$$\frac{W_e}{W_m} = Q$$

II- REFLEXION ET TRANSMISSION D'UNE ONDE A L'INTERFACE AVEC UN CONDUCTEUR

1- Cas d'un très bon conducteur

Soit une onde plane monochromatique polarisée rectilignement dans le plan d'incidence. Sa pulsation est ω et son vecteur d'onde est $\vec{k}$. Elle arrive avec une incidence normale, sur la surface plane d'un conducteur. Une partie de l'onde est réfléchie et l'autre est transmise avec un nombre d'onde $k \simeq \sqrt{\frac{\mu_r \varepsilon_r}{2Q}} k_0 (1-i)$.



Les nombres d'ondes sont tels que :

$$k_r = k_i = k \quad \text{et} \quad k_t = K(1-i)$$

Onde incidente :

$$\vec{E}_i^* = E_{0i}\vec{e}_x e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i^* = \frac{E_{0i}}{c}\vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

Onde réfléchie :

$$\vec{E}_r^* = E_{0r}\vec{e}_x e^{i(\omega t + kz)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r^* = -\frac{E_{0r}}{c}\vec{e}_y e^{i(\omega t - kz)}$$

Onde transmise :

$$\vec{E}_t^* = E_{0t} e^{-Kz}\vec{e}_x e^{i(\omega t - Kz)} \quad \text{et} \quad \vec{B}_t^* = \frac{K}{\omega}(1-i) e^{-Kz} E_{0t}\vec{e}_y e^{i(\omega t - Kz)}$$

Le champ électrique est continu en $z=0$. On a alors :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

N'ayant pas de courant de surface, la continuité du champ magnétique implique :

$$\frac{E_{0i}}{c}-\frac{E_{0r}}{c}=\frac{K(1-i)}{\omega}E_{0t}$$

D'où les solutions :

$$E_{0r}=\frac{1-\frac{K}{k_0}(1-i)}{1+\frac{K}{k_0}(1-i)}E_{0i} \quad \text{et} \quad E_{0t}=\frac{2}{1+\frac{K}{k_0}(1-i)}E_{0i}$$

2- Cas du conducteur parfait

Un conducteur parfait réfléchit tout le rayonnement incident. Il ne présente donc pas d'onde transmise. Cela revient à dire que $\delta \to 0$ ou *K* très grand. Et l'on peut vérifier que les solutions ci-dessus deviennent :

$$E_{0r} \simeq -E_{0i}$$
$$E_{0t} \simeq 0$$

Dans ce cas, l'onde réfléchie présente un déphasage de π par rapport à l'onde incidente.

2- L'onde totale dans l'espace vide, lorsque le conducteur est parfait

On a donc simplement :

Une onde incidente :

$$\vec{E}_i^{\,*}=E_{0i}\vec{e}_x e^{i(\omega t-kz)}$$

Et une onde réfléchie :

$$\vec{E}_r^{\,*}=-E_{0i}\vec{e}_x e^{i(\omega t+kz)}$$

E_{0i} est supposé réel. L'onde totale est la somme des deux ondes. Ce qui correspond à un champ total :

$$\vec{E}_{tot}^{*}=\vec{E}_i^{\,*}+\vec{E}_r^{\,*}=-2iE_{0i}\sin kz\, e^{i\omega t}\,\vec{e}_x$$

$$\vec{E}_{tot}=2E_{0i}\sin kz\,\sin\omega t\,\vec{e}_x\,\ddot{}$$

Il s'agit donc d'une onde stationnaire. Il y a un découplage entre les dépendances du temps et de l'espace. Il existe des points pour lesquels le champ est toujours nul quelque soit *t*. Ils correspondent à :

$$kz_n = n\pi \quad \text{ou encore} \quad z_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n}{2}\lambda$$

Où *n* est un entier.

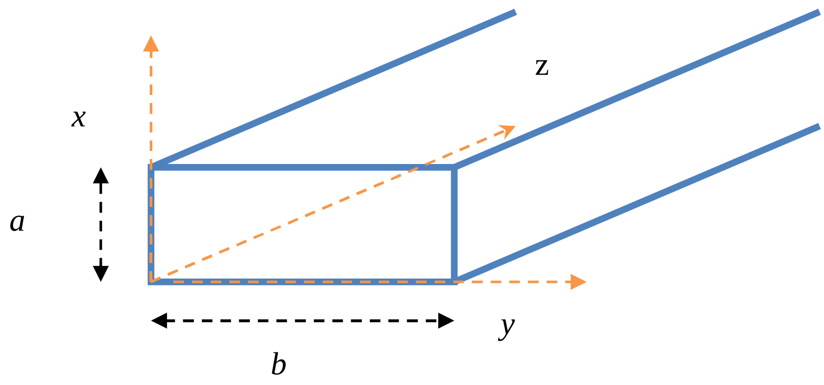
GUIDES D'ONDES METALLIQUES

I- INTRODUCTION

Guide métallique vide

Métal : conducteur parfait

Vide : $\rho = 0 \; et \; \vec{J} = 0$



II- PROPAGATION EN LIGNE DROITE

L'onde voit les parois du guide selon les directions x et y. Pour une onde sinusoïdale se propageant selon z, on les expressions du champ électromagnétique :

Expression du champ em : $\begin{cases} \vec{E}^* = \left[E_{0x}(x,y)\vec{e}_x + E_{0y}(x,y)\vec{e}_y + E_{0z}(x,y)\vec{e}_z \right] e^{i(\omega t - kz)} \\ \vec{B}^* = \left[B_{0x}(x,y)\vec{e}_x + B_{0y}(x,y)\vec{e}_y + B_{0z}(x,y)\vec{e}_z \right] e^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$

Les amplitudes dépendent des directions selon lesquelles on rencontre les conditions aux limites pour les champs électrique et magnétique.

Les champs doivent obéir aux équations de Maxwell correspondant au vide, c'est-à-dire avec $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$.

On a :

$$\vec{\nabla}.\vec{E}^{*}=0$$

qui s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial E_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial E_{0y}}{\partial y}=ikE_{0z} \qquad (1)$$

On a :

$$\vec{\nabla}.\vec{B}^{*}=0$$

qui s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial B_{0x}}{\partial x}+\frac{\partial B_{0y}}{\partial y}=ikB_{0z} \qquad (2)$$

On a :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}^{*}=-\frac{\partial\vec{B}^{*}}{\partial t}$$

qui s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}+ikE_{oy}=-i\omega B_{0x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}+ikE_{ox}=i\omega B_{0y} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial E_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial E_{0x}}{\partial y}=-i\omega B_{0z} \qquad (5)$$

Et :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}^{*}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}^{*}}{\partial t}$$

qui s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}+ikB_{oy}=i\omega\varepsilon_0\mu_0E_{0x} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}+ikB_{ox}=-i\omega\varepsilon_0\mu_0E_{0y} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial B_{0y}}{\partial x}-\frac{\partial B_{0x}}{\partial y}=i\omega\varepsilon_0\mu_0E_{0z} \qquad (8)$$

Reportons l'équation (4) dans l'équation (6) :

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}+\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}=i\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)E_{0x}$$

La même onde, en propagation dans le vide illimité, aurait l'équation de dispersion :

$$\omega = ck_0$$

Il ne faut pas confondre le nombre d'onde dans le vide sans bords, k_0, et le nombre d'onde dans le guide *k*. On alors :

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}+\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}=i\left(k_0^2-k^2\right)E_{0x} \qquad (a)$$

De même on trouve pour les autres composantes, avec d'autres combinaisons évidentes d'équations :

$$\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}-\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}=i\left(k_0^2-k^2\right)E_{0y} \qquad (b)$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}+\frac{k}{\omega}\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}=i\left(k_0^2-k^2\right)B_{0x} \qquad (c)$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}+\frac{k}{\omega}\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}=i\left(k_0^2-k^2\right)B_{0y} \qquad (d)$$

De toute évidence, les équations de Maxwell montrent que l'onde peut être totalement connue, à partir des dérivées partielles de E_{0z} et B_{0z} :

$$E_{0x}=\frac{i}{\omega\left(k^2-k_0^2\right)}\left[\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}+\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right]$$
$$E_{0y}=\frac{i}{\omega\left(k^2-k_0^2\right)}\left[\frac{k}{\omega}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}-\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right]$$
$$B_{0x}=\frac{i}{\omega\left(k^2-k_0^2\right)}\left[\frac{k}{\omega}\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right]$$
$$B_{0y}=\frac{i}{\omega\left(k^2-k_0^2\right)}\left[\frac{k}{\omega}\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right]$$

III- ONDES TEM

Si on prend $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} = 0$. C'est le cas des ondes transverses électrique et magnétique (TEM). Les équations ci-dessus montrent que ces ondes ne peuvent exister dans le guide. Les TEM ne se propagent pas dans ces guides.

Voici une autre façon de comprendre pourquoi.

On a pour le champ électrique :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{A}$ et, par conséquent, $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ sont selon l'axe du guide. Il en résulte :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t}\right)\vec{e}_z$$

Si $\vec{E}$ est transverse, et c'est notre hypothèse,

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y$$

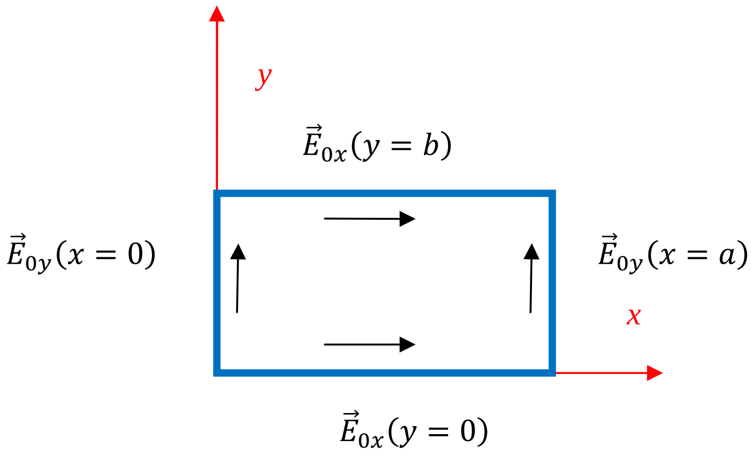
Est-ce possible ? Prenons les formes :

$$V = V_0\left(x, y\right)e^{i(\omega t - kz)}$$
$$\vec{E} = \vec{E}_0\left(x, y\right)e^{i(\omega t - kz)}$$

Avec naturellement :

$$\vec{E}_0 = -\frac{\partial V_0}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V_0}{\partial y}\vec{e}_y$$

Vérifions maintenant la continuité aux bords.



En $x=0$ et $x=a$, $E_{0y}=0$, donc $V_0 = cte$.
De même, en $y=0$ et $y=b$, $E_{0x}=0$, donc $V_0 = cte$.

Le guide est conducteur, le potentiel y est donc partout constant. Or tenant compte du théorème de l'extremum, le potentiel ne peut être que constant à l'intérieur. Le Champ électromagnétique est donc nul.

Il n'y a donc pas de propagation d'une TEM dans le guide soumis aux hypothèses formulées.

IV- ONDES TE

Nous allons considérer une onde transverse électrique.

$$\vec{E}^* = \left[E_{0x}(x,y)\vec{e}_x\right]e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{et} \quad \vec{B}^* = \left[B_{0y}(x,y)\vec{e}_y + B_{0z}(x,y)\vec{e}_z\right]e^{i(\omega t - kz)}$$

1- Solution

Observons d'abords que l'équation (7) vérifie que B_{0z} est indépendant de *x*, ce qui va simplifier l'équation de propagation :

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Laquelle donne explicitement :

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \left(k_0^2 - k^2\right)B_{0z} = 0$$

On pose $k_0^2 - k^2 = K^2$:

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + K^2 B_{0z} = 0$$

L'équation de propagation de $\vec{B}^*$ a donc pour la composante selon z la solution :

$$B_{0z} = A\cos(Ky)$$

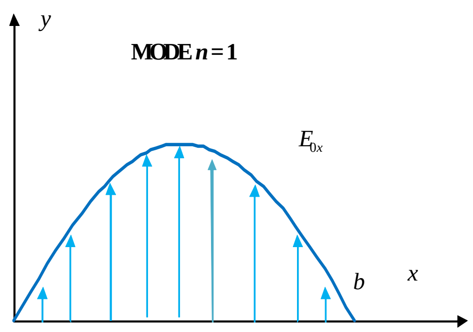
avec $K = \frac{n\pi}{b}$, où n est un entier non nul. Car l'équation (6) montre que $\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}$ est continu en $y = 0$ et $y = b$ qui résulte de la continuité aux frontières.
Et l'on obtient l'équation de dispersion :

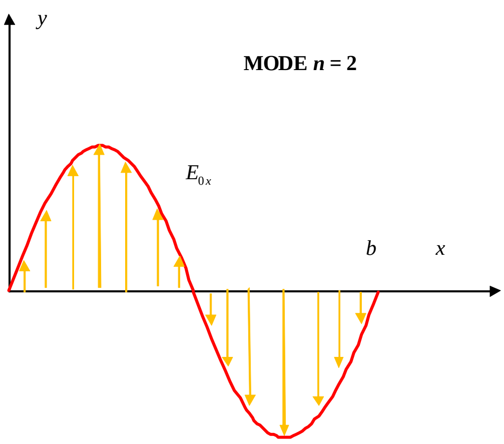
$$k = \left(k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

n représente le mode de propagation. On voit que le guide se comporte comme un filtre passe-haut, dont la fréquence de coupure dépend de la géométrie : $\nu_c = \frac{nc}{2b}$.

On peut maintenant calculer les autres composantes. L'équation (4) implique B_{0y} et l'équation (5) implique E_{0x} :

$$B_{0y} = i\frac{Akb}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$
$$E_{0x} = i\frac{A\omega b}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$





2- Vitesse de phase et vitesse de groupe

Avec $V_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ et $V_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

$$V_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^2}} \quad \text{et} \quad V_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^2} \qquad \rightarrow \quad V_\varphi V_g = c^2$$

3- Puissance transmise

Calculons le vecteur de Poynting.

$$\vec{\Pi} = \frac{\mathrm{Re}\,\vec{E}^* \wedge \mathrm{Re}\,\vec{B}^*}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\left(E_x B_z \vec{e}_y + E_x B_y \vec{e}_z\right)$$

A coup sûr, il ne peut y avoir de composante moyenne selon $\vec{e}_y$.

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\left\langle E_x B_y \right\rangle \vec{e}_z$$

La puissance électromagnétique rayonnée à travers une section du guide est :

$$P = \int_0^a \int_0^b \langle \Pi \rangle dxdy = \frac{ab^3 A}{4n^2\pi^2\mu_0} k\omega$$

ONDES ET DIELECTRIQUES

I- PROPAGATION DANS UN MILIEU SANS BORDS

Le milieu est supposé homogène, isotrope et linéaire. Pour simplifier on suppose des isolants parfaits.

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \begin{cases} \mu\varepsilon = \mu_0\varepsilon_0\mu_r\varepsilon_r \\ \mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2} \end{cases}$$

On prend $\mu_r = 1$.

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{V_\varphi^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \begin{cases} V_\varphi = \dfrac{c}{n} \leq c \quad \text{et} \quad \lambda = \dfrac{\lambda_0}{n} \\ n = \sqrt{\varepsilon_r} \text{ est l'indice de réfraction} \end{cases}$$

La vitesse de groupe nécessite la connaissance de $n(\omega)$, car :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\left(n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}\right)}$$

On peut établir comme dans le vide :

$$\vec{v}_\varphi.\vec{E} = 0 \quad et \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

II- REFLEXION ET TRANSMISSION ENTRE DEUX DIELECTRIQUES

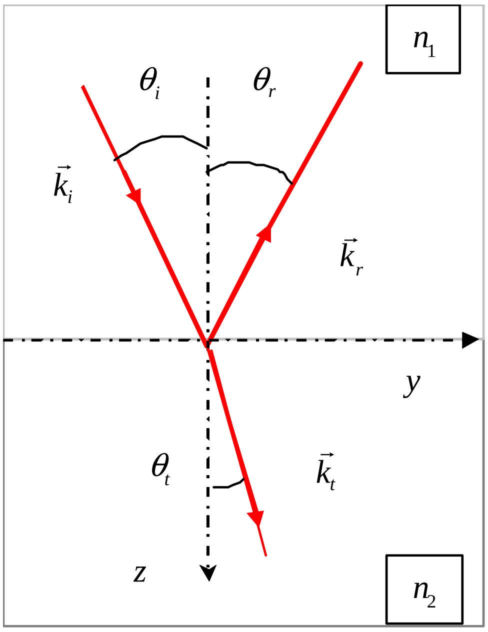
1- Polarisation dans le plan d'incidence

Soit une onde plane monochromatique avec une polarisation rectiligne dans le plan d'incidence.

$$\vec{E}_i^* = E_{0i}\left(\cos\theta_i\vec{e}_y - \sin\theta_i\vec{e}_z\right)e^{i\left(\omega t - ky\sin\theta_i - kz\cos\theta_i\right)}$$

$$\vec{B}_i^* = -\frac{kE_{0i}}{\omega}\vec{e}_x e^{i\left(\omega t - ky\sin\theta_i - kz\cos\theta_i\right)}$$

Cette onde utilisée par l'expérimentateur est supposée connue. A l'interface, une partie va être réfléchie et l'autre partie transmise. On ne connait pas ces deux dernières ondes, en dehors de leurs formes planes et monochromatiques.



Il faut remarquer que :

$$\left\|\vec{k}_i\right\| = \left\|\vec{k}_r\right\| = k$$

Car l'incidente et la réfléchie sont dans le même milieu.

L'onde réfléchie s'écrit :

$$\vec{E}_r^* = E_{0r}\left(\cos\theta_r \vec{e}_y + \sin\theta_r \vec{e}_z\right)e^{i(\omega t - ky\sin\theta_r + kz\cos\theta_r)}$$

$$\vec{B}_r^* = -\frac{kE_{0r}}{\omega}\vec{e}_x e^{i(\omega t - ky\sin\theta_r + kz\cos\theta_r)}$$

Et l'onde transmise :

$$\vec{E}_t^* = E_{0t}\left(\cos\theta_t \vec{e}_y - \sin\theta_t \vec{e}_z\right)e^{i(\omega t - k_t y\sin\theta_t - k_t z\cos\theta_t)}$$

$$\vec{B}_t^* = -\frac{k_t E_{0t}}{\omega}\vec{e}_x e^{i(\omega t - k_t y\sin\theta_t - k_t z\cos\theta_t)}$$

2- Coefficients de réflexion et de transmission

La continuité du champ ne peut être assurée, s'il n'y a pas égalité des arguments des exponentielles. Ce qui impose :

$$\vec{k}_i.\vec{r} = \vec{k}_r.\vec{r} = \vec{k}_t.\vec{r}$$

Cela implique que $\left(\vec{k}_i - \vec{k}_r\right) \text{et} \left(\vec{k}_i - \vec{k}_t\right)$ sont portés par la normale $\vec{e}_z$, C'est-à-dire que les vecteurs $\left(\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t, \vec{e}_z\right)$ sont coplanaires. C'est la première loi de Descartes de l'Optique géométrique.

L'égalité des arguments implique aussi :

$$\theta_i = \theta_r \text{ (Loi de Descartes pour la réflexion)}$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \text{ (Loi de Descartes pour la réfraction)}$$

La composante tangentielle du champ électrique est continue à l'interface des 2 milieux. Ce qui s'écrit :

$$E_{0i}\left(\cos\theta_i\right)e^{i(\omega t - ky\sin\theta_i)} + E_{0r}\left(\cos\theta_r\right)e^{i(\omega t - ky\sin\theta_r)} = E_{0t}\left(\cos\theta_t\right)e^{i(\omega t - k_t y\sin\theta_t)}$$

Ou encore :

$$E_{0i}\left(\cos\theta_i\right) + E_{0r}\left(\cos\theta_r\right) = E_{0t}\left(\cos\theta_t\right)$$

Ecrivons la continuité de la composante normale de l'induction électrique.

$$-\varepsilon_1 E_{0i}\left(\sin\theta_i\right) + \varepsilon_1 E_{0r}\left(\sin\theta_r\right) = -\varepsilon_2 E_{0t}\left(\sin\theta_t\right)$$

D'où les coefficients de réflexion et de transmission :

$$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\sin\theta_t \cos\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_i}{\sin\theta_t \cos\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

$$t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin\theta_t \cos\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

L'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente. Le signe du coefficient de réflexion n'est pas fixé.

3- Angle de Brewster

Il existe une incidence particulière pour laquelle il n'y a pas de réflexion. Elle correspond à

$$n_1 \cos\theta_{t_B} = n_2 \cos\theta_{i_B}$$

Cette incidence, dite de Brewster est donnée par :

$$\mathrm{tg}\,\theta_{iB} = \pm\frac{n_2}{n_1}$$

4- Polarisation normale au plan d'incidence

Avec le même raisonnement que précédemment, on trouve :

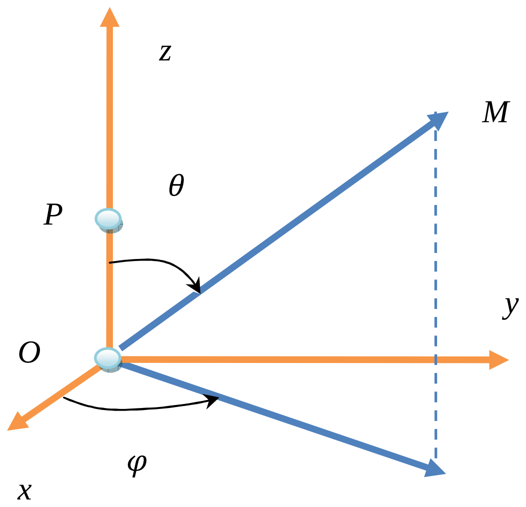
$$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\sin\theta_t \cos\theta_t - \sin\theta_i \cos\theta_i}{\sin\theta_t \cos\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

$$t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin\theta_t \cos\theta_t + \sin\theta_i \cos\theta_i}$$

RAYONNEMENT DIPOLAIRE

I- POTENTIELS RETARDES

On considère un dipôle selon l'axe Oz, placé à l'origine du repère, décrivant un mouvement sinusoïdal selon z. $+q$ est en P et $-q$ en O.



Le moment dipolaire s'écrit :

$$\vec{p} = p_0 e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

Nous allons considérer :

$$OM \gg OP$$
$$OM \gg \lambda$$

C'est l'oscillation en P qui crée le potentiel vecteur. Ce qu'on observe à t en M, c'est ce qui s'est produit en P à $t - \frac{r}{c}$:

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi PM} \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$\vec{A}(r,t) = i\frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \vec{e}_z$$

Avec la jauge de Lorentz on a :

$$V(r,t) \simeq i\,\frac{\mu_0 \omega p_0 c \cos\theta}{4\pi r}\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

II- CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Champ magnétique :

$$\vec{B}(r,t) \simeq -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi c r}\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\varphi$$

Champ électrique :

A très longue distance la composante radiale est pratiquement inexistante. L'ordre du développement permet de négliger la partie imaginaire de la composante orthoradiale.

$$\vec{E}(r,t) \simeq -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi r}\,e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\vec{e}_\theta$$

Le champ électromagnétique se propage à la vitesse c, avec un vecteur d'onde $\vec{k}$. L'onde est transversale très loin du dipôle.

III- PUISSANCE RAYONNEE

Vecteur de Poynting :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle \simeq \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 c r^2}\vec{e}_r$$

Puissance rayonnée :

$$P \simeq \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$$

BIBLIOGRAPHIE

Livres

Champs et ondes électromagnétiques. P. LORRAIN & D-R. CORSON - *A. COLIN*.

Electromagnétisme : Fondements et applications. J-P. PEREZ, R. CARLES & R. FLECKINGE - *MASSON*

Liens

BOSTON UNIVERSITY : http://physics.bu.edu/py106/Notes.html

UNIVERSITE DE GRENOBLE : http://www-laog.obs.ujf-grenoble.fr/~ferreira/teaching.html#L1